

Sylaby zo štatistickej fyziky a termodynamiky

I. Termodynamika

1. *Stavy a deje*: makrostavy a mikrostavy, termodynamická rovnováha, 0-tá veta termodynamická a empirická teplota; vratné a nevratné deje, (p, V) -diagram; práca ako integrál tlaku, znázornenie práce na (p, V) -diagrame, práca pri cyklickom deji

2. *Ideálny plyn*: definícia ideálneho plynu a jeho vzťah k reálnym plynom, deje v plynach (Boylov-Mariottov zákon a Gay-Lussacove zákony, práca pri izotermickom deji); absolútna teplota (súvis s teplotou v $^{\circ}\text{C}$, jednotka 1 K, plynový teplomer), stavová rovnica ideálneho plynu (odvodenie z Boylovho-Mariottovho a Gay-Lussacovho zákona, jednotka 1 mol a konštanta v stavovej rovnici pre 1 mol plynu)

3. *Práca a teplo*: práca ako prenos energie usporiadaným pohybom molekúl (vzorec „práca = sila $\times$ posunutie“, práca plynu pri ľubovoľnom tvare nádoby), výmena tepla ako prenos energie nespořiadaným pohybom molekúl (vzorec „teplo = tepelná kapacita $\times$ prírastok teploty“, kalorimetria, mechanický ekvivalent tepla); nezávislosť veličiny teplo + práca od cesty a zavedenie vnútornej energie systému, prvá veta termodynamická ako tvrdenie o nemožnosti perpetua mobile prvého druhu, zápis prvej vety termodynamickej v diferenciálnom tvare

4. *Adiabatický dej*: energia ideálneho plynu (rozpínanie do vákua a nezávislosť energie od objemu, vyjadrenie energie cez teplotu s konštantou úmernosti obsahujúcou počet stupňov voľnosti molekúl), Boltzmannova konštanta a vzorec pre strednú energiu molekúl; súvis medzi merným teplom ideálneho plynu pri stálom objeme a stálom tlaku (Mayerov vzťah); rovnica adiabaty – zostrojenie diferenciálnej rovnice pre tlak ako funkciu objemu, jej riešenie separáciou premenných, porovnanie adiabat s izotermami

5. *Carnotov cyklus*: druhá veta termodynamická ako tvrdenie o nemožnosti perpetua mobile druhého druhu, Kelvinova a Clausiova formulácia druhej vety termodynamickej; Carnotov stroj a Carnotova chladnička, vyjadrenie účinnosti Carnotovho stroja cez Q_1 a Q_2 ; veta o účinnosti tepelných strojov (formulácia a dôkaz – stačí uvažovať prípad, že sa práca, ktorú vykoná stroj, rovná práci, ktorú prijme chladnička), vyjadrenie účinnosti Carnotovho stroja cez T_1 a T_2 , termodynamická teplota

6. *Entropia*: nezávislosť $\int \delta Q/T$ od cesty – aj s dôkazom – a zavedenie entropie, prepis prvej vety termodynamickkej cez entropiu; znázornenie Carnotovho cyklu na (T, S) -diagrame a zovšeobecnenie vety o účinnosti tepelných strojov; entropia ideálneho plynu, aditívnosť entropie, tretia veta termodynamická

7. *Zákon rastu entropie*: teplo pri nevratných dejoch (disipácii energie a rozpínaní plynu do vákua), formulácia druhej vety termodynamickkej cez entropiu, tepelná smrť vesmíru

čo *nebude* na skúške:

definícia empirickej teploty – „mechanická” definícia tepla – rýchlosť zvuku – dôkaz vety o účinnosti tepelných strojov v prípade, že sa práca, ktorú vykoná stroj, nerovná práci, ktorú prijme chladnička – dôkaz nezávislosti energie ideálneho plynu od objemu zo vzorca pre entropiu

II. Kinetická teória plynov

1. *Atómy*: zákon stálych zlučovacích pomerov a násobných zlučovacích pomerov, 2-atómové molekuly ako najmenšie stavebné jednotky prvkov, atómová hmotnosť; Avogadrovo číslo a Avogadrovo číslo, Perrinov pokus

2. *Tlak v kinetickej teórii plynov*: tlak nerelativistického plynu (počet molekúl s rýchlosťami z daného elementárneho objemu vo v -priestore, ktoré dopadnú na plochu S za čas Δt , sila, ktorou pôsobia tieto molekuly na plochu S , celková sila a tlak – zápis cez $\overline{v_x^2}$, prechod od $\overline{v_x^2}$ k $\overline{v^2}$); žiarenie čierneho telesa ako žiarenie, ktoré je v tepelnej rovnováhe s látkou, Stefanov-Boltzmannov zákon a Wienov posunovací zákon, súvis tlaku s hustotou energie – odvodenie prechodom od $v \ll c$ k $v = c$ vo vzorci pre tlak nerelativistického plynu – a závislosť hustoty energie a tlaku od teploty

3. *Maxwellovo rozdelenie rýchlostí*: hustota pravdepodobnosti vo v -priestore pre rovnovážny plyn – odvodenie z predpokladov o izotropnosti neusporiadaného pohybu molekúl a štatistickej nezávislosti zložiek rýchlosti, určenie α (konštanty v argumente exponenciály) porovnaním dvoch vzorcov pre tlak, určenie C (konštanty pred exponenciálou) z normovacej podmienky, stredná kvadratická rýchlosť a stredná kinetická energia molekúl;

ekvipartičná teoréma – odvodenie z predpokladu, že pre energiu rotačného a kmitavého pohybu platí rovnaké rozdelenie ako pre energiu postupného pohybu

4. *Boltzmannova kinetická rovnica*: rozdeľovacia funkcia v obyčajnom priestore a priestore rýchlostí, Boltzmannova rovnica pre bezzrážkový plyn, tvar zrážkového člena a fyzikálny význam dvoch členov, z ktorých sa skladá, odvodenie rovnovážnej rozdeľovacej funkcie z Boltzmannovej rovnice; *H*-teoréma – tvar *H*-funkcie a diskusia jej správania sa pri nevratných dejoch (či nie je v spore so symetriou Newtonovej mechaniky vzhľadom na obrátenie smeru plynutia času)

čo *nebude* na skúške:

Pascalov zákon z hľadiska kinetickej teórie – vyjadrenie intenzity žiarenia cez hustotu energie – ďalšie špeciálne rýchlosti molekúl (najpravdepodobnejšia rýchlosť, stredná absolútna hodnota rýchlosti) – odvodenie zrážkového člena v Boltzmannovej rovnici

III. Štatistická mechanika: mikrokánonický súbor

1. *Vývoj mikrostavu*: fázový priestor, Hamiltonián a Hamiltonove rovnice, zachovanie energie pre uzavretý systém; Liouvillova veta – formulácia a interpretácia cez fázový objem prenášaný pozdĺž dráh systémov

2. *Štatistické súbory*: pravdepodobnostné rozdelenie vo fázovom priestore pre jednotlivé systémy počas dostatočne dlhého času T (ergodičnosť a konečnosť času Δt , ktorý systém strávi v danom fázovom objeme $\Delta\Omega$, pravdepodobnosť $\Delta\mathcal{P}$, že systém nájdeme v tomto fázovom objeme, ako limita podielu $\Delta t/T$, hustota pravdepodobnosti výskytu systému v danom mieste fázového priestoru ako limita podielu $\Delta\mathcal{P}/\Delta\Omega$), pravdepodobnostné rozdelenie vo fázovom priestore pre súbor systémov, štatistická a časová stredná hodnota; malosť fluktuácií makroskopických veličín (že sú rádu $1/\sqrt{N}$)

3. *Mikrokánonický súbor*: postulát o rovnomernom rozdelení pravdepodobnosti pre uzavreté systémy (argumenty – rovnocennosť rovnovážnych systémov a zanedbateľný fázový objem pripadajúci na nerovnovážne systémy, súhlas s Liouvillovou vetou); normovanie hustoty pravdepodobnosti, ak má energia presnú hodnotu E (rozdelenie je obmedzené na nadplochu konštantnej energie Σ_E) a ak je energia z malého intervalu ΔE (rozdelenie

je rozmazané vo valcovej vrstve okolo Σ_E)

4. *Boltzmannova definícia entropie*: entropia v mikroskopickej teórii ako $k \times$ logaritmus počtu stavov, vyjadrenie počtu stavov cez fázový objem, veľkosť bunky vo fázovom priestore (elektrón na úsečke a v kocke – nulové a periodické okrajové podmienky, bunky v 1- a N -časticovom fázovom priestore), hustota stavov; zákon rastu entropie v mikroskopickej teórii – nerovnovážny systém ako súbor rovnovážnych podsystemov, rozdelenie pravdepodobnosti v energiách podsystemov – vyjadrenie cez celkovú entropiu systému, rovnováha ako stav prislúchajúci píku rozdelenia pravdepodobnosti

5. *Sackurov-Tetrodeho vzorec*: entropia ideálneho plynu vrátane aditívnej konštanty – odhad cez počet stavov, ktoré sú k dispozícii molekulám plynu (počítaný ako fázový objem/objem bunky vo fázovom priestore); Gibbsov paradox a približné zahrnutie identičnosti častíc do výpočtu celkového počtu stavov; teplota degenerácie – definícia cez argument logaritmu vo vyjadrení entropie, hodnota pre elektrónový plyn v kovoch

6. *Podmienky rovnováhy*: teplota ako obrátená hodnota dS/dE – odvodenie z podmienky tepelnej rovnováhy a výpočet pre ideálny plyn (tak, že sa skombinuje Sackurov-Tetrodeho vzorec s vyjadrením tlaku cez energiu, získaným z kinetickej teórie plynov); adiabatický dej v mikroskopickej teórii, derivácia energie podľa vonkajšieho parametra pri adiabatickom deji – vyjadrenie cez strednú hodnotu derivácie Hamiltoniánu, tlak v mikroskopickej teórii a podmienka mechanickej rovnováhy; chemický potenciál – definícia a hodnota pre klasický ideálny plyn, podmienka chemickej rovnováhy

7. *Maxwellovo-Boltzmannovo rozdelenie*: vyjadrenie entropie cez počet stavov („priechinkov“) a častíc („gulôčok“) v energetických vrstvách, variačný princíp pre entropiu pri danom počte častíc N a danej energii E – formulácia cez Lagrangeove multiplikátory α a β ; zápis stredného počtu častíc v i -tom stave cez α a β a cez μ (chemický potenciál) a T (teplotu), zápis entropie cez μ a T ; barometrický vzorec – odvodenie z Maxwellovho-Boltzmannovho rozdelenia a overenie s využitím podmienky mechanickej rovnováhy

čo *nebude* na skúške:

odvodenie Liouvillovej vety z rovnice kontinuity pre rozdeľovaciu funkciu a Hamiltonových rovníc – odvodenie vzorca pre fluktuácie makroskopických veličín – súhlas mikro-

kánonického rozdelenia so štatistickou nezávislosťou podsystémov – stacionárne stavy v nádobe ľubovoľného tvaru – výpočet tlaku z derivácie 1-časticových energií podľa objemu – dôkaz, že adiabatické deje sú vratné – výpočet, ktorým sa získa Maxwelllovo-Boltzmannovo rozdelenie – určenie α a β z podmienky, aby mali N a E zadané hodnoty

IV. Štatistická mechanika: ďalšie súbory

1. *Kánonický súbor*: kánonické (Boltzmannovo) rozdelenie ako rozdelenie pre systémy, ktoré sú v kontakte s rezervoárom – odvodenie z mikrokánonického rozdelenia postupom, pri ktorom sa rozdelenie pre uvažovaný systém prepíše cez entropiu rezervoára s argumentom posunutým o $-E$ a tá sa rozvinie do prvého rádu v E ; rovnováha ako kompromis medzi snahou systému znížiť E a zvýšiť S – zdôvodnenie a overenie pre ideálny plyn; odvodenie Maxwelllovo-Boltzmannovho rozdelenia z kánonického, ak ho vzťahujeme k jednotlivým molekulám

2. *Termodynamické potenciály*: zavedenie termodynamických potenciálov ako funkcií, ktorých prirodzenými premennými sú 2 zo 4 veličín teplota-entropia-tlak-objem, vyjadrenie potenciálov F (voľnej energie), H (entalpie) a G (Gibbsovej voľnej energie) cez E (energiu) pomocou Legendrovej transformácie; voľná energia ako veličina, ktorá zadáva maximálnu prácu pri danej teplote a má minimum pri danej teplote a objeme, Gibbsova voľná energia ako N -násobok chemického potenciálu

3. *Štatistická suma*: prenos definície entropie z mikrokánonického súboru do kánonického a prepis takto zavedenej entropie na integrál cez mikrostavy systému, vyjadrenie voľnej energie cez normovaciu konštantu v Boltzmanovom rozdelení A a cez štatistickú sumu $Z = 1/A$, zápis štatistickej sumy v tvare integrálu cez mikrostavy systému; postup od štatistickej sumy k voľnej energii a od voľnej energie k termodynamickým charakteristikám systému (tlaku, entropii, chemickému potenciálu) pre ideálny plyn

4. *Grandkánonický súbor*: grandkánonické rozdelenie ako rozdelenie pre systémy, ktoré si vymieňajú s rezervoárom okrem tepla aj častice – odvodenie z mikrokánonického rozdelenia tým istým postupom ako pri kánonickom súbore s pridaným argumentom N ; rozšírenie termodynamických potenciálov o premennú N a zavedenie Landauovho potenciálu Ω prechodom od N k μ v F , zápis Ω cez $\tilde{Z}$ (veľkú štatistickú sumu); odvodenie

Maxwellovho-Boltzmannovho rozdelenia vrátane normovania z grandkónonického, ak ho vztiahneme k súborom molekúl v jednotlivých stavoch a využijeme malosť $\bar{n}_i$

čo *nebude* na skúške:

súladi kónonického rozdelenia s Liouvillovou vetou – vzorec pre entropiu ideálneho plynu získaný z kónonického rozdelenia pre jednotlivé molekuly – zápis štatistickej sumy ako stopy operátora $e^{-\beta\hat{H}}$ – vzorec $\Omega = -pV$ pre Landauov potenciál

V. Aplikácie štatistickej mechaniky

1. *Kvantové plyny*: Fermiho-Diracovo a Boseho-Einsteinovo rozdelenie – idea odvodenia z variačného princípu pre entropiu pri danom N a E a odvodenie z veľkej štatistickej sumy pre súbor častíc v i -tom stave, s využitím vzťahov $\tilde{Z}_i = \sum q_i^{n_i}$ a $\bar{n}_i = \tilde{Z}_i^{-1} q_i$ pre fermióny a $\tilde{Z}_i^{-1} q_i \partial_{q_i} \tilde{Z}_i$ pre bozóny, kde $q_i = e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}$

2. *Fermiho plyn*: Fermiho-Diracovo rozdelenie pri $T = 0$ (θ -funkcia so skokom pri Fermiho energii ϵ_F) a $T \sim 0$ (θ -funkcia rozmazaná v intervale $\Delta\epsilon \sim kT$); určenie Fermiho hybnosti p_F z podmienky, aby mal počet častíc zadanú hodnotu, charakteristiky Fermiho plynu – Fermiho energia, celková energia plynu, tlak plynu – v nerelativistickej a ultrarelativistickej limite, relatívne zoslabovanie coulombovskej interakcie so zvyšovaním n ; tepelná kapacita pri $T \sim 0$ – energia tepelného pohybu častíc ΔE_0 ako súčet energií $\Delta E = E - E_\mu$ a $\Delta E_\mu = E_\mu - E_0$, kde E_μ je energia plynu, ktorý má rozdeľovaciu funkciu obrezanú pri energii μ , idea výpočtu ΔE a ΔE_μ , tepelná kapacita pri stálom objeme $C_V = (\partial_T E)_V$ pri $T \sim 0$ a pri ľubovoľnom T ; kompaktné hviezdy – odhad $R \sim m_p/m_e \cdot r_g$ pre polomer bielych trpaslíkov a $R \sim r_g$ pre polomer neutrónových hviezd, kde $r_g = 2\kappa M/c^2$ je gravitačný polomer hviezdy (polomer, ktorý by mala hviezda po stlačení do čiernej diery), viď porovnanie vzorcov $p \sim \kappa M/R \cdot \rho$ (vyplýva z podmienky mechanickej rovnováhy) a $p \sim n_e \epsilon_{Fe} \doteq \rho/(2m_p) \cdot \epsilon_{Fe}$ pre plyn elektrónov a $n_n \epsilon_{Fn} \lesssim \rho/m_n \cdot \epsilon_{Fn}$ pre plyn neutrónov, v relativistickom režime s $\epsilon_{\text{kin}} = \epsilon - mc^2 \sim mc^2$

3. *Boseho-Einsteinova kondenzácia*: teplota T_c , pri ktorej chemický potenciál stúpne zo záporných hodnôt na nulu – určenie z podmienky, aby mal počet častíc zadanú hodnotu; energia E_c ako násobok kT_c , závislosti $N_{\epsilon>0} \propto T^{3/2}$, $E \propto T^{5/2}$ a $C_V \propto T^{3/2}$ pri

teplotách nižších než T_c , tvar funkcie $C_V(T)$

4. *Prenosové javy*: vyjadrenie strednej voľnej dráhy molekúl l cez účinný prierez σ , vedenie tepla (prenos energie neusporiadaným pohybom molekúl) – definícia tepelnej vodivosti κ vzorcom pre prúd energie $q = -\kappa T'$, odhad κ zo zápisu q cez energie molekúl na úseku s dĺžkou l , $q \sim nv(\epsilon_1 - \epsilon_2) \doteq -nve'l$, rovnica vedenia tepla; vnútorné trenie (prenos hybnosti neusporiadaným pohybom molekúl) – definícia viskozity η vzorcom pre napätie medzi vrstvami plynu kolmými na os y a pohybujúcimi sa v smere osi x , $\sigma = -\eta \partial_y V$, odhad η zo zápisu σ cez x -ové zložky hybnosti molekúl na úseku s dĺžkou l , $\sigma \sim nv \cdot m(V_1 - V_2) \doteq -nv \partial_y V l$, viskózný člen v Navierovej-Stokesovej rovnici; difúzia (prenos molekúl v dôsledku ich neusporiadaného pohybu) – definícia difúzneho koeficientu D vzorcom pre čistý prúd častíc $J = -Dn'$, odhad D zo zápisu J cez hustoty počtu molekúl na úseku s dĺžkou l , $J \sim (n_1 - n_2)v \doteq -vn'l$, rovnica difúzie

5. *Van der Waalsova rovnica*: zostavenie stavovej rovnice neideálneho plynu pridaním opráv k objemu $\delta V = -b = -Nb_1$ a tlaku $\delta p = a/V^2 = n^2 a_1$, kde a_1 a b_1 sú materiálové charakteristiky vzťahujúce sa k 1 molekule, význam a - a b -člena – b je objem, ktorý zaberajú molekuly, pochádza od odpudivej van der Waalsovej sily a zvyšuje tlak kvôli odrazom molekúl v blízkosti stien nádoby, a pochádza od príťažlivej van der Waalsovej sily a znižuje tlak kvôli pôsobeniu molekúl vnútri plynu na molekuly v povrchovej vrstve; výpočet a_1 zo Z – výpočet Z_V (časti Z pochádzajúcej z potenciálnej energie) poruchovou metódou a určenie opravy k tlaku z $\delta p = -\partial_V \delta F = kT \partial_V \ln Z_V$

6. *Fázové prechody*: opis fázového prechodu plyn-kvapalina pomocou van der Waalsovej rovnice – zavedenie bezrozmerných premenných, identifikácia bodu na $(\tilde{p}, \tilde{V})$ -diagrame s $\tilde{p} = \tilde{V} = \tilde{T} = 1$ ako kritického bodu (miesta, kde má izoterma stacionárny inflexný bod), neprípustnosť rastu tlaku s objemom a vypriamanie izoterm pod kritickým bodom spĺňajúce podmienku, aby plocha pod priamym úsekom bola rovnaká ako pod zvlneným (Maxwellovo pravidlo), interpretácia priameho úseku ako znázornenia fázového prechodu; Clausiova-Clapeyronova rovnica (vzorec pre dp/dT na krivke rovnováhy fáz) – určenie dp/dT derivovaním rovnice $\mu_I = \mu_{II}$ podľa T , dosadením za $\partial_T \mu$ a $\partial_p \mu$ z $d\mu = s dT - v dp$ (vyplýva z $\mu = G_1$) a prechodom od Δs k latentnému teplu $q = T \Delta s$, krivka rovnováhy fáz ďaleko od kritického bodu, trojný bod

7. *Žiarenie čierneho telesa*: módy elektromagnetického poľa pre voľné pole (rovinné monochromatické vlny s ľubovoľnými vlnovými vektormi $\mathbf{k}$ a dvomi polarizáciami) a pre pole vnútri nádoby (stojaté monochromatické vlny s vlnovými vektormi $\mathbf{k}_{(n_x, n_y, n_z)}$, kde n_x, n_y aj $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), rozdelenie počtu módov vo frekvenciách – výpočet rozdeľovacej funkcie a porovnanie s hustotou stavov nerelativistického plynu; Rayleighov-Jeansov zákon (tvar spektrálnej hustoty energie pre klasické [nekvantové] žiarenie čierneho telesa) – odvodenie z ekvipartičnej teorémy, ultrafialová katastrofa; Planckov zákon (tvar spektrálnej hustoty energie pre žiarenie čierneho telesa ako plynu fotónov) – nulový chemický potenciál ako dôsledok toho, že počet fotónov nie je fixovaný, nízko- a vysokofrekvenčná asymptotika Planckovho zákona, odvodenie Stefanovho-Boltzmannovho zákona a Wienovho posunovacieho zákona, argument pre to, že na 1 fotón v žiarení čierneho telesa pripadá kocka s hranou, ktorá sa rovná typickej vlnovej dĺžke fotónov

8. *Debyeova teória merných tepiel*: $C = \text{konšt}$ pri vysokých teplotách (Dulongov-Petitov zákon) – odvodenie z ekvipartičnej vety pre normálne módy kmitov mriežky, $C \propto T^3$ pri nízkych teplotách – odvodenie zo vzorca pre celkovú energiu fonónov, v ktorom použijeme závislosť $\omega(k)$ pre zvukové vlny a integrál cez k rozšírime do nekonečna (čo dá $3/2$ energie žiarenia čierneho telesa s $c \rightarrow \bar{v}_{zv}$); interpolácia medzi nízko- a vysokoteplotným režimom pomocou obrezania integrálu cez k pri Debyeovom vlnovom čísle k_D , definovanom tak, aby sa počet fonónových stavov rovnal počtu normálnych kmitov (ktorý sa rovná $3N$, kde N je počet uzlov mriežky), tvar funkcie $C(T)$

čo *nebude* na skúške:

počet možných rozmiestnení N_I identických častíc do G_I stavov pre fermióny a bozóny – výpočet príspevku ΔE k tepelnej energii Fermiho plynu prepisom vzorca pre E pri $\Delta\epsilon = \epsilon - \mu \lesssim kT \ll \mu$ – odhad maximálnej hmotnosti kompaktných hviezd – výpočet κ a η z Boltzmannovej rovnice – zdôvodnenie Maxwellovho pravidla rovnakých plôch pomocou Carnotovho cyklu medzi priamym a zvlneným úsekom izotermy – krivka na $(\tilde{p}, \tilde{T})$ -diagrame znázorňujúca rovnováhu fáz pre látku opísanú van der Waalsovou rovnicou – okrajové podmienky pre elektromagnetické žiarenie v kovovej kocke – súvis spektrálneho rozdelenia intenzity žiarenia vo frekvenciách a vlnových dĺžkach