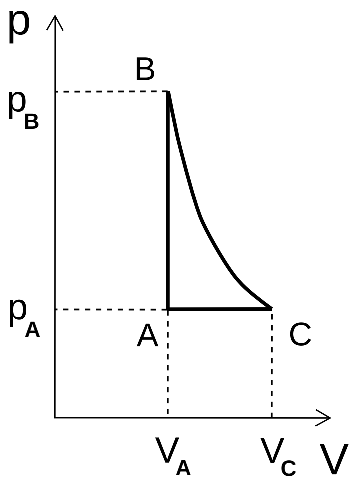
Štatistická fyzika a termodynamika – vzorová písomka

1. Deje v plynoch: Majme 1 mol 1-atómového plynu, v ktorom prebieha cyklický dej znázornený na obrázku. Úsek BC je adiabata.



(a) Ako tento dej vyzerá na (T, V)-diagrame? (1 b.)

(b) Pri ktorom smere deja plyn koná prácu, ABC alebo ACB, a prečo? (1 b.)

(c) Zapíšte práce A_{AC}, A_{BC} aj celkovú prácu A pri „správnom" smere deja cez veličiny V_{A}, V_{C}, p_{A}, p_{B}, a vylúčte V_{C} pomocou rovnice adiabaty. (2 b.)

(d) Aké znamienka majú teplá Q_{AB}, Q_{AC} a prečo? (2 b.)

(e) Zapíšte teplo Q_1 dodané plynu pri „správnom" smere deja cez veličiny V_{A}, p_{A}, p_{B}. (2 b.)

(f) Vyjadrite A, Q_1 ako násobok $p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$ pri $p_{\mathrm{B}} = 3p_{\mathrm{A}}$ a zrátajte účinnosť deja. (1 b.)

2. Pravdepodobnosť a štatistika: Hádžeme kockou dovtedy, pokým nepadne trojka.

(a) Zapíšte pravdepodobnosť P_κ, že počet hodov pred padnutím trojky bude κ, cez pravdepodobnosť padnutia trojky p (pre nesfalšovanú kocku 1/6) a pravdepodobnosť padnutia iného čísla než trojky $q = 1 - p$, a presvedčte sa, že súčet pravdepodobností je 1. (1 b.)

(b) Ukážte, že ak k je počet hodov *vrátane* padnutia trojky, $k = \kappa + 1$, potom $\bar{k} = 1/p$. *Návod:* Zapíšte $\bar{\kappa}$ ako $q \times$ derivácia vhodne zvolenej funkcie x pri $x = q$. (2 b.)

(c) Stredná kvadratická odchýlka k, $\sigma_k = (\overline{k^2} - \bar{k}^2)^{1/2}$, sa dá počítať podobne ako stredná hodnotu k, akurát namiesto prvej derivácie treba zrátať druhú. Ukážte, že pri $p \ll 1$ platí $\sigma_k \doteq 1/p$. (Presný vzorec je $\sigma_k = \sqrt{q}/p$). *Návod:* využite, že v danej limite $\overline{k^2} \doteq \overline{\kappa(\kappa - 1)}$). (2 b.)

(d) Urobíme ν sérií hodov, pri ktorých budeme hádzať kocku dovtedy, pokým nepadne trojka. V prvej sérii padne trojka po κ_1 hodoch, v druhej sérii po κ_2 hodoch, atď. až po poslednú sériu, keď padne po κ_ν hodoch. Zapíšte pravdepodobnosť $\mathcal{P}_\kappa$, že pri takejto „sérii sérií" padne trojka práve raz po κ hodoch, cez pravdepodobnosti $\hat{p} = P_\kappa$ a $\hat{q} = 1 - \hat{p}$. (2 b.)

3. Mikroskopický opis termodynamických systémov: Majme 3 častice a 4 stavy s energiami $(-\epsilon, 0, \epsilon/2, \epsilon/2)$.

(a) Zapíšte štatistickú sumu pre rozlíšiteľné častice pomocou premennej $q = e^{\beta\epsilon}$. (1 b.)

(b) Určte počet stavov nerozlíšiteľných častíc, fermiónov a bozónov, zo všeobecného vzorca, ktorý platí pre N častíc v G stavoch, a znázornite, ako tieto stavy vyzerajú. (2 b.)

(c) Zapíšte štatistickú sumu pre fermióny a bozóny. (2 b.)

(d) Očakávali by sme, že ak vydelíme štatistickú sumu v prípade (a) 3!, dostaneme v limite veľkých T to isté čo v prípadoch (b) a (c). Tak to aspoň fungovalo pri ideálnom plyne. Zrátajte štatistickú sumu v uvažovaných troch prípadoch pri $\beta = 0$ $(T = \infty)$ a vysvetlite, prečo sa tieto sumy nerovnajú. (2 b.)

4. Voľná energia: Štatistická suma ideálneho plynu bozónov s $\mu = 0$ sa dá zapísať ako $Z = \prod_i (1 - e^{-\beta\epsilon_i})^{-1}$.

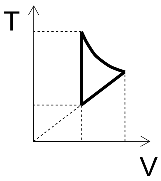
(a) Zapíšte voľnú energiu ako $\sum_i$. (1 b.)

(b) Prepíšte $\sum_i$ na $\int_0^\infty d\omega$ pre plyn fotónov. (2 b.)

(c) Urobte integráciu per partes a nájdite, ako súvisí voľná energia s energiou. (2 b.)

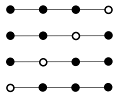
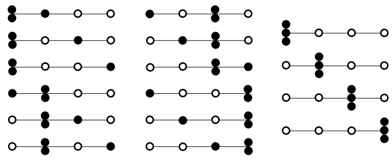
(d) Vyjadrite tlak a entropiu cez energiu. (2 b.)

RIEŠENIE

1(a) 

(b) ABC, lebo p na úseku BC je $> p_{\mathrm{A}} \Rightarrow A_{\mathrm{BC}} > A_{\mathrm{AC}}$; (c) $A_{\mathrm{AC}} = p_{\mathrm{A}}(V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{A}})$, $A_{\mathrm{BC}} = \frac{3}{2}(p_{\mathrm{B}}V_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C}}) \Rightarrow A = (\frac{3}{2}p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}})V_{\mathrm{A}}) - \frac{1}{2}p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{C}} = (\frac{3}{2}p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}p_{\mathrm{A}}^{2/5}p_{\mathrm{B}}^{3/5})V_{\mathrm{A}}$; (d) AB: $T \propto p \uparrow$, $A_{\mathrm{AB}} = 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{AB}} > 0$ & AC: $T \propto V \uparrow$, $A_{\mathrm{AC}} > 0 \Rightarrow Q_{\mathrm{AC}} > 0$; (e) $Q_1 = Q_{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2}(p_{\mathrm{B}} - p_{\mathrm{A}})V_{\mathrm{A}}$; (f) $A = \frac{1}{2}(7 - 3^{3/5})p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$, $Q_1 = 3p_{\mathrm{A}}V_{\mathrm{A}}$ $\Rightarrow \eta = \frac{1}{6}(7 - 3^{3/5}) = 0,87$

2(a) $P_\kappa = pq^\kappa$, $\sum q^\kappa = \frac{1}{p}$; (b) $\bar{\kappa} = pq\frac{d}{dx}\sum x^\kappa\Big|_{x=p} = \frac{q}{p}$; (c) $\overline{\kappa(\kappa-1)} = pq^2\frac{d^2}{dx^2}\sum x^\kappa\Big|_{x=p} = \frac{2q^2}{p^2} \doteq \frac{2}{p^2}$; (d) $\mathcal{P}_\kappa = \nu\hat{p}\hat{q}^{\nu-1}$

3(a) $Z = (q^{-1} + 1 + 2q^{1/2})^4$; (b) F: $\binom{4}{3}$,  B: $\binom{6}{3}$, dtto + 

(c) F: $Z = 2q^{-1/2} + 1 + q$, B: $Z = q^{-3} + q^{-2} + 2q^{-3/2} + q^{-1} + 2q^{-1/2} + 4 + 2q^{1/2} + 3q + 4q^{3/2}$;

(d) $\frac{32}{3}$, 4, 20; lebo počet častíc a počet stavov nie sú $\gg 1$

4(a) $F = kT \sum_i \ln(1 - e^{-\beta\epsilon_i})$; (b) $\sum_i \to \int\limits_0^\infty \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$; (c) $\mathcal{I} = \int\limits_0^\infty \omega^2 \ln(1-Q) d\omega$, $Q = e^{-\beta\hbar\omega}$: $\mathcal{I} = \frac{1}{3}\omega^3 \ln(1-Q)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \frac{1}{3}\omega^3 \frac{\beta\hbar Q}{1-Q} d\omega = -\frac{1}{3}\int\limits_0^\infty \frac{\beta\hbar\omega}{q-1}\omega^2 d\omega$, $q = e^{\beta\hbar\omega} \Rightarrow F = -\frac{1}{3}E$;

(d) $p = -\partial_V F = \frac{1}{3}E/V$, $S = (E-F)/T = \frac{4}{3}E/T$