

Príklady zo strún za letný semester 2021/22

KLASICKÁ STRUNA

1. 3.

1. *Pulzujúci prstenec* (Z p6.4 **D**). Nájdite z účinku struny v časovej kalibrácii, ako pulzuje kruhová struna. Využite, že ak lagranžian nezávisí explicitne od času, zachováva sa energia systému. RIEŠENIE: $r = R \cos(t/R)$.

2. *Účinok upevnenej struny* (Z p6.3 **F**). Majme strunu upevnenú na koncoch, ktorá koná rovinné kmity, a predpokladajme, že na nej nevznikajú spätné zahnutia ani slučky. Zapište lagranžovskú hustotu struny. RIEŠENIE: $\mathcal{L} = -T\sqrt{1 - \dot{y}^2 + y'^2}$.

8. 3.

3. *Pohyb koncov struny* (Z 6.9 **D+F**). Ukážte, že vektor $\mathcal{Q}^\mu = -T[-X^{\mu'}\dot{X}^2 + \dot{X}^\mu \times (\dot{X} \cdot X')]/[-\dot{X}^2 X'^2 + \dot{X} \cdot X']^{1/2}$, vystupujúci v pohybovej rovnici struny, má v statickej kalibrácii tvar $\mathcal{Q}^\mu = -T(-v_\parallel, (1 - v^2)\boldsymbol{\tau} + v_\parallel \mathbf{v})/(1 - v_\perp^2)^{1/2}$, a presvedčte sa, že z $\mathcal{Q}^\mu|_{0,\sigma_f} = 0$ plynie, že konce otvorenej struny sa pohybujú kolmo na strunu rýchlosťou svetla. Tento výsledok spolu s konštrukciou izotropných súradníc v Z 7.1 zaručuje, že predpoklad o σ , ktorý sme prijali vo všeobecnom prípade, že má konštantné hodnoty na koncoch struny, platí aj v prípade, že súradnice (σ, τ) sú izotropné.

15. 3.

4. *Voľná struna v statickej kalibrácii* (Z 7.4 **F**). Ukážte, že pre voľnú otvorenú strunu v statickej kalibrácii platí $\mathbf{X}(\sigma, t) = \vec{\mathcal{X}}(t_-) + \vec{\mathcal{X}}(t_+)$, kde $t_\pm = t \pm \sigma$ a $\vec{\mathcal{X}}(u)$ je periodická funkcia s periódou $2\sigma_1$, spĺňajúca $\vec{\mathcal{X}}'^2 = 1/4$.

5. *Rotujúca tyčka* (Z 7.4 **F**). Pohyb voľnej otvorenej struny je úplne zadany, ak je zadany pohyb jedného jej konca. Nájdite, ako sa pohybuje struna, ktorej koniec so $\sigma = 0$ sa rovnomerne otáča, $\mathbf{X}(0, t) = \frac{1}{2}l(\cos \omega t, \sin \omega t)$. RIEŠENIE: $\mathbf{X}(\sigma, t) = \frac{1}{2}l \cos \omega \sigma (\cos \omega t, \sin \omega t)$, kde $\omega = \pi/\sigma_1$ a $l = 2\omega^{-1}$ (vďaka tomu sa konce struny pohybujú rýchlosťou svetla!).

6. *Upevnená struna v statickej kalibrácii* (Z 7.4 **D**). Ukážte, že pre strunu s koncami v bodoch $x = 0, a$ na x -ovej osi v statickej kalibrácii platí $\mathbf{X}(x, t) = \vec{\mathcal{X}}(t_-) - \vec{\mathcal{X}}(t_+)$, kde $t_\pm = t \pm x$ a $\vec{\mathcal{X}}(u)$ je periodická funkcia s periódou $2a$, spĺňajúca $\vec{\mathcal{X}}'^2 = 1/4$.

7. *Švihadlo* (Z p7.4 **D**). Nájdite, ako sa pohybuje struna s koncami v bodoch $x = 0, a$ na x -ovej

osi, ktorá sa rovnomerne otáča, $\mathbf{X}(x, t) = (x, f(x) \cos \omega t, f(x) \sin \omega t)$, a vyjadrite uhol γ , ktorý táto struna zviera na svojich koncoch s x -ovou osou. RIEŠENIE: $f(x) = l \sin \omega x$, kde $\omega = \pi/a$ a $l = \omega^{-1}$; $\tan \gamma = \pi/a$.

22. 3.

8. *Ešte rotujúca tyčka (Z- $\mathbf{F}$)*. Majme otvorenú strunu v prvom excitovanom móde, teda takú, ktorej jediné nenulové fourierovské koeficienty v rozvoji $\mathcal{X}'$ sú α_0 a $\alpha_{\pm 1}$, a nech sa táto struna nachádza v pokojovej sústave ($\alpha_0 = (A, \mathbf{0})$), ktorú zvolíme tak, že hmotný stred struny je v počiatku súradníc ($x = 0$) a struna kmitá v rovine (X^1, X^2). Určte α_1 z podmienok $L_0 = L_1 = L_2 = 0$ a nájdite zložky $X = \alpha_0 \tau + i(\alpha_1 \cos \sigma e^{-i\tau} - \text{c. c.})$ ako funkcie (σ, τ) . RIEŠENIE: $\alpha_1 = (0, \mathbf{B})$, $\mathbf{B} = \frac{1}{2}A(1, \pm i)$ (sem sa dá doplniť fázový súčiniteľ, ktorý je ale nepodstatný, lebo sa dá vždy odstrániť vhodným otočením súradníc); $X^0 = A\tau$, $\mathbf{X} = A \cos \sigma (\sin \tau, \mp \cos \tau)$.

9. *Ešte pulzujúci prstenec (Z- $\mathbf{D}$)*. Majme uzavretú strunu v prvom excitovanom móde, teda takú, ktorej jediné nenulové fourierovské koeficienty v rozvoji X'_I , $I = L, R$, sú α_0 a $\alpha_{\pm 1I}$ (z periodičnosti X plynie $\alpha_{0R} = \alpha_{0L} = \alpha_0$!), a nech sa táto struna nachádza v pokojovej sústave ($\alpha_0 = (A, \mathbf{0})$), ktorú zvolíme tak, že hmotný stred struny je v počiatku súradníc ($x_I = 0$) a struna kmitá v rovine (X^1, X^2). Určte α_{1I} z podmienok $L_{0I} = L_{1I} = L_{2I} = 0$ a nájdite zložky $X = \alpha_0 \tau + \frac{i}{2}[(\alpha_{1R} e^{i\sigma} + \alpha_{1L} e^{-i\sigma}) e^{-i\tau} - \text{c. c.}]$ ako funkcie (σ, τ) . RIEŠENIE: $\alpha_{1I} = (0, \mathbf{B}_I)$, $\mathbf{B}_R = \frac{1}{2}A(1, -i)$ a $\mathbf{B}_L = \frac{1}{2}A(1, i)$ (sem sa dajú doplniť nepodstatné fázové súčinitele a dá sa urobiť takisto nepodstatná výmena znamienok v y -ových zložkách $\mathbf{B}_I$; podstatné je len, že znamienka sú rôzne, rovnaké znamienka by viedli na bodovú časticu s rýchlosťou 1); $X^0 = A\tau$, $\mathbf{X} = A(\cos \sigma, \sin \sigma) \sin \tau$.

5. 4.

10. *Parameter sklonu (Z 8.6 $\mathbf{F}$)*. Uvažujme rotujúcu tyčku (otvorenú strunu v prvom móde oscilácií) v teórii, do ktorej vrátíme napätie struny T aj hodnotu σ na konci struny σ_1 ; σ sa dá síce preškálovať tak, aby bolo $\sigma_1 = \pi$, ale idea odvodenia vzťahu medzi energiou a momentom hybnosti spočíva práve v tom, že z neho musí σ_1 vypadnúť. Rovnice tyčky sú podľa príkladu 5 $X^0 = \tau$, $\mathbf{X} = \omega^{-1} \cos \omega \sigma (\cos \omega \tau, \sin \omega \tau)$, kde $\omega = \pi \sigma_1^{-1}$ (viď tiež príklad 9). Zrátajte energiu a moment hybnosti tyčky, $E = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}^0 d\sigma$ a $J = \int_0^{\sigma_1} (X \mathcal{P}^y - Y \mathcal{P}^x) d\sigma$, kde $\mathcal{P}_\mu = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{X}^\mu = T(-\dot{X}^0, \dot{\mathbf{X}})$, a nájdite vzťah medzi nimi. RIEŠENIE: $E = T\sigma_1$, $J = T\sigma_1^2/(2\pi)$, $J = E^2/(2\pi T)$. V jednotkách, v ktorých $c = 1$, sa energia v sústave hmotného stredu struny rovná pokojovej hmotnosti struny M ; nájdený vzťah teda môžeme zapísať aj ako $J = M^2/(2\pi T)$. V 60-rokoch fyzici zaviedli *Reggeho trajektórie* ako čiary v rovine ($M^2, \mathcal{J}$), $\mathcal{J} = J/\hbar$, pozdĺž ktorých boli naukladané mezónové a

baryónové rezonancie pozorované na urýchľovačoch. (V teórii sa tieto rezonancie opisovali ako *Reggeho póly* – póly amplitúdy rozptylu v komplexnej rovine.) Ukázalo sa, že Reggeho trajektórie sú *lineárne*: funkcia $\mathcal{J} = \alpha(M^2)$ má tvar $\alpha'(M^2 - M_0^2) - \mathcal{J}_{0,\text{traj}}$ s konštantným parametrom sklonu α' . Teória strún, ak ju chápeme ako teóriu hadrónov, vysvetľuje túto lineárnosť a pre parameter sklonu dáva hodnotu $\alpha' = 1/(2\pi\hbar T)$ (v obyčajných jednotkách $\alpha' = 1/(2\pi\hbar cT)$, a ak položíme $\hbar = c = \pi T = 1$, $\alpha' = 1/2$).

3. 5.

11. Komutátor Y s Y (Z 12.2 **D**). Komutátor veličín α_n^I (koeficientov Fourierovho rozvoja funkcií $\mathcal{X}^{I'}$) získame z rovnakočasových komutátorov priečných súradníc svetoplochy struny X^I a kánonicky združených hybností $\mathcal{P}^I = \dot{X}^I$, ak prejdeme k funkciám Y^I definovaným vzťahmi $Y^I(\sigma, \tau) = (\dot{X}^I + X^{I'}) (\sigma, \tau)$ pri $\sigma \in \langle 0, \pi \rangle$ a $Y^I(\sigma, \tau) = (\dot{X}^I - X^{I'}) (-\sigma, \tau)$ pri $\sigma \in \langle -\pi, 0 \rangle$. Nájdite rovnakočasový komutátor funkcií Y^I . RIEŠENIE: $[Y^I(\sigma, \tau), Y^J(\bar{\sigma}, \tau)] = 2\pi i \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \bar{\sigma})$.

6. 5.

12. Komutátor L s x , α (Z 12.4 **D**). Virasorove generátory $L_n = \frac{1}{2} \sum \alpha_m \cdot \alpha_{n-m}$, ktoré sme zaviedli ako koeficienty Fourierovho rozvoja funkcie $\mathcal{X}'^2$, majú význam generátorov posunutí v premennej u , od ktorej závisia funkcie $\mathcal{X}^\mu$: ak zapíšeme všeobecné posunutie ako $\xi = \sum \xi_n e^{inu}$, generátor L_n „má v kompetencii“ n -tý člen rozvoja (súčin $L_n \xi_n$ s infinitezimálnym ξ_n generuje $\delta \mathcal{X}^\mu$ pri $\delta u = \xi_n e^{inu}$). V svetelnej kalibrácii, kde sú všetky L_n identicky nulové, úlohu generátorov posunutí preberajú *priečne* Virasorove generátory $L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum \alpha_m^I \alpha_{n-m}^I$. Keď prejdeme od obyčajných (c -číslových) premenných k operátorom, vznikne problém s definíciou $L_0^\perp$, kde vystupujú súčiny nekomutujúcich operátorov $\alpha_m^I \alpha_{-m}^I$; riešime to tak, že zdefinujeme $L_0^\perp = : \frac{1}{2} \sum \alpha_m^I \alpha_{-m}^I :$ $= \sum_{m>0} \alpha_{-m}^I \alpha_m^I$. Dokážte z komutačných vzťahov $[x^I, p^J] = i\delta_{IJ}$, $[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\delta_{m+n}\delta_{IJ}$, a z identity $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$, že platí $[L_n^\perp, x^I] = -i\alpha_n^I$ (z $L_n^\perp$ treba odseparovať členy s $p^I = \alpha_0^I$) a $[L_n^\perp, \alpha_p^I] = -p\alpha_{n+p}^I$. Využite, že pri komutovaní $L_0^\perp$ netreba brať do úvahy normálny súčin – prečo? Návod: pozrite sa, ako správa $[AB, C]$ pri výmene A a B , ak A aj B komutuje s C .

13. Komutátor L s $\mathcal{X}$ (Z 12.4 **F**). Dokážte z komutačných vzťahov odvodených v predošlom príklade, že platí $[L_n^\perp, \mathcal{X}^I] = -ie^{inu} \mathcal{X}^{I'}$. (Pripomeňme, že $\mathcal{X}^I = \frac{1}{2}x^I + \frac{1}{2}p^I u + \sum' \frac{i}{n} \alpha_n^I e^{-inu}$.) Majme kružnicu parametrizovanú premennou u a na nej všeobecnú transformáciu (difeomorfizmus), pri ktorej sa bod P_0 so súradnicou u_0 premiestni do bodu P so súradnicou $u = u(u_0) = u_0 + \delta u$. Funkciu ψ na transformovanej kružnici zodpovedá funkcia ψ_0 na pôvodnej kružnici taká, že $\psi_0(u_0) = \psi(u(u_0))$ (ψ_0 = pullback ψ), a zmena formy funkcie ψ , $\delta\psi = \psi_0(u) - \psi(u) =$

$\psi(u + \delta u) - \psi(u)$, sa pri δu infinmitezimálnom redukuje na $\delta\psi = \psi'\delta u$. (Všimnime si, že ak to dosadíme do definície Lieovej derivácie funkcie ψ , $\mathcal{L}_{\partial_u}\psi = \delta\psi/\delta u$, dostaneme správny vzorec $\mathcal{L}_{\partial_u}\psi = \psi'$.) Z nájdeného vyjadrenia $[L_n^\perp, \mathcal{X}^I]$ vyplýva, že zmena operátorov $\mathcal{X}^I$ generovaná súčinom $L_n^\perp \xi_n$, $\delta\mathcal{X}^I = i[L_n^\perp \xi_n, \mathcal{X}^I]$, sa rovná zmene formy operátorovo zhodnotených funkcií $\mathcal{X}^I(u)$ pri transformácii s $\delta u = \xi_n e^{inu}$, tak ako sa tvrdilo v zadaní predchádzajúceho príkladu.

10. 5.

14. Komutátor L s L (Z 12.4 **D+F**) – BONUS. Ukážte s využitím vzorca pre komutátor $[L_n^\perp, \alpha_p^I]$, nájdeného v príklade 12, že komutátor priečných Virasorových generátorov sa dá formálne zapísať ako $[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2}(m-n) \sum \alpha_p^I \alpha_{m+n-p}^I$. Pri $m+n \neq 0$, keď do súčinov na pravej strane vstupujú *komutujúce* operátory, to znamená, že platí $[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2}(m-n)L_{m+n}^\perp$; pri $m+n=0$ na pravej strane navyše vystupuje číslo A_m zvané *centrálny náboj* (vynásobené jednotkovým operátorom, ktorý sa vynecháva), komutátor má teda tvar $[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2}(m-n)L_0^\perp + A_m \delta_{m+n}$. Ukážte, že platí $A_m = \sum_1^{m_-} p(m-p) = \frac{1}{12}mm_+$, kde $m_\pm = m \pm 1$. Návod: rozdeľte $L_m^\perp$ aj $L_{-m}^\perp$ na časť s $p = 1, \dots, m_-$ resp. $p = -1, \dots, -m_-$ (časť sumy, kde každý člen vystupuje iba raz) a zvyšok zapísaný ako suma od 0 po ∞ , a pozrite sa na príspevky od oboch častí k $[L_m^\perp, L_{-m}^\perp]$ s využitím identity $[AB, CD] = CA[B, D] + C[A, D]B + A[B, D]C + [A, C]BD$. Dospějete k vyjadreniu A_m v tvare sumy od 1 po m_- , ktorú ešte treba zrátať; to spravíte tak, že zapíšete $\sum p = \partial_q \sum q^p \Big|_{q=1}$ (to len pre úplnosť, výsledok poznáte z toho, ako malý Gauss spočítal čísla od 1 po 100) a $\sum pp_- = \partial_q^2 \sum q^p \Big|_{q=1}$. – Súbor komutátorov L s L sa nazýva *Virasorova algebra*. Podľa výsledku príkladu 13 sa operátor $L_n^\perp$ správa pri pôsobení na operátorovo zhodnotené funkcie $\mathcal{X}^I(u)$ ako *diferenciálny* operátor, $L_n^\perp = -ie^{inu}\partial_u \equiv -iD_u$; skutočne, $[D_u, \mathcal{X}^I] = D_u\mathcal{X}^I - \mathcal{X}^I D_u = D_u \overset{\downarrow}{\mathcal{X}^I}$, kde šípka označuje, že D_u pôsobí iba na $\mathcal{X}^I$. Očakávali by sme, že z tejto reprezentácie $L_n^\perp$ dostaneme takisto Virasorovu algebru, akurát bez centrálneho náboja, ktorý nemá odkiaľ vyjsť. Lenže beda: dostaneme ju, ale s *opačným znamienkom* (!). Ako to? Dôvod je, že Virasorova algebra platí pre transformácie *stavov*, nie operátorov; a transformácie stavov sa generujú diferenciálnymu operátormi s opačným znamienkom, aby maticové elementy boli invariantné. Je to rovnaký mechanizmus ako pri prechode od Schrödingerovho k Heisenbergovmu obrazu: Hamiltonián pôsobí na stavy v Schrödingerovom obraze ako $i\partial_t$, vid' $H|\psi\rangle = i\partial_t|\psi\rangle$, ALE na operátory v Heisenbergovom obraze ako $-i\partial_t$, vid' $[H, A_H] = -i\dot{A}_H$.