

## Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

### Sada č.2

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 15.03.2024

#### 1. Starkov jav

Pri Starkovom jave uvažujeme atóm vo vonkajšom elektrickom poli  $E_{ext}$ . Energetické hladiny elektrónu vo vodíku v tejto situácii nevieme vypočítať presne. Poruchová teória tu príde veľmi vhod.

Pre statické elektrické pole  $E_{ext}$  vieme pripraviť len intenzity  $E_{ext} \ll E_{in}$ , kde  $E_{in}$  je pole od protónu v typickej atomárnej vzdialenosti  $a$ , kde  $a$  je Bohrov polomer. Pomer  $E_{ext}/E_{in}$  potom udáva, ako dobre bude poruchový rozvoj konvergovať a to z nasledovného dôvodu: ak by elektrón s protónom vytvoril elektrický dipól, jeho hodnota by bola rádovo  $p \approx ea$ . Pripomeňme, že potenciálna energia dipólu je v klasickej elektrostatike  $U_{pot} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ . Typické energie elektrónu v atóme vodíka sú preto rádovo  $\varepsilon \approx eaE_{in}$  a takéto sú aj typické rozdiely medzi hladinami. Na druhej strane po zapnutí poľa  $E_{ext}$ , čo tu chápeme ako poruchu, možno očakávať  $H' \approx eaE_{ext}$ . Poruchový rad je rozvoj v mocninách  $H' / (\varepsilon_n - \varepsilon_k) \approx eaE_{ext} / eaE_{in} = E_{ext} / E_{in}$ .

Odhadnite intenzitu elektrického poľa  $E_{in}$  a okomentujte konvergenciu poruchového rozvoja pre energiu elektrónu  $E_n$ . **[2 body]**

#### 2. Zbierka, kap.12, príklad A1: Starkov jav pre $e^-$ v atóme H na druhej excitovanej hladine

(a) Aká je degenerácia druhej excitovanej hladiny elektrónu v atóme vodíka bez započítania spinu elektrónu?

(b) Ktoré maticové elementy poruchy majú šancu byť nenulové pre túto hladinu? Podobne ako v predchádzajúcom príklade poruchou je vonkajšie elektrické pole a jemu odpovedajúci  $\hat{H}'$  je ten istý, ako bol pre prvú excitovanú hladinu prepočítanú na prednáške.

Integrály, ktoré dávajú nenulové maticové elementy  $H'_{ij}$  nepočítajte, avšak stručne zdôvodnite, prečo sú nulové tie, ktoré sú nulové.

Riešte pre elektrón bez spinu, keďže spin neinteraguje s  $\vec{E}_{ext}$ .

Podobný riešený príklad je v Zbierke, kap.12, príklad A1.

(c) Ako sa (len kvalitatívne) rozštiepi degenerovaná druhá excitovaná hladina vo vonkajšom elektrickom poli? Určte pretrvávajúce degenerácie rozštie-

pených hladín.

[2 body]

**3. výskyt elektrónu v atóme  $H$  v stacionárnom stave s  $n\ell m=200$**

K porozumeniu Starkovho javu pre prvú excitovanú hladinu sme použili bez dôkazu, že v stave popísanom vlnovou funkciou  $\varphi_{200}(\vec{r})$  je elektrón s vysokou pravdepodobnosťou v oblasti s  $r > 2a$ . Vypočítajte túto pravdepodobnosť. Na prednáške sme povedali, že výjde  $7/e^2$ .

*Bolo to dôležité preto, aby sme mohli povedať, že v hybridnom stave  $\Psi_+$  je elektrón väčšinou "pod protónom" bližšie ku kladnej doske kondenzátora, a teda jeho energia je znížená, zatiaľ čo v stave  $\Psi_-$  je to naopak a energia elektrónu je po zapnutí  $E_{ext}$  zvýšená.*

*Pomôcka: pri počítaní integrálu urobte substitúciu integračnej premennej  $\rho_{NEW} = r/a - 2$ . Ostáva spočítať integrály typu  $\int_0^\infty t^N e^{-t} dt = N!$*  [2 body]

**4. jemná štruktúra hladiny s  $n=3$**

Na prednáške sme predviedli všeobecný výpočet pre jemnú štruktúru spektrálnych čiar elektrónu v atóme vodíka a na príklade sme spočítali jemnú štruktúru základnej a prvej excitovanej hladiny. Určte teraz jemnú štruktúru, vrátane degenerácie, druhej excitovanej hladiny. [2 body]