Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.4

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 12.04.2024

1. *viriálový teorém pre elektrón v atóme vodíka*
Na prednáške sme povedali, že viriálový teorém platí v kvantovej teórii pre každý stacionárny stav a predviedli sme jeho platnosť pre stacionárne stavy JHO.

*(*a) Pomocou viriálového teorému dokážte, že v n-tom stacionárnom stave elektrónu v atóme vodíka platí $\overline{\frac{1}{r}} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{a}$, kde a je Bohrov polomer. *Vzťah je bez odvodenia v Zelenej knihe, 4.kap., časť o atóme vodíka. Potrebovali sme ho pri jemnej štruktúre.*

(b) Na základe viriálového teorému čomu sú rovné stredná kinetická energia a stredná potenciálna energia v eV elektrónu v základnom stave?

(c) Platí viriálový teorém (rovnaký vzťah medzi $\overline{T}$ a $\overline{V}$) aj pre jemnú štruktúru elektrónových hladín? **[2 body]**

2. *viriálový teorém pre anharmonický oscilátor*
Uvažujme sústavu (*anharmonický oscilátor*) s potenciálom $V(x) = \alpha x^4$, kde α je reálna kladná konštanta. Nech je známe, že základný stav tejto sústavy je $10\,\mathrm{eV}$. Aká je stredná kinetická energia v tomto stave a aká je stredná potenciálna energia?
Porovnajte to s hodnotami $\overline{T}$ a $\overline{V}$ pre harmonický oscilátor s rovnakou základnou hladinou $E_0 = 10\,\mathrm{eV}$. Keď porovnáme hodnoty $\overline{T}$ za predpokladu rovnakých hmotností, ktorý oscilátor sa "hýbe pomalšie"? Čo k tomu hovorí intuícia, ak si ich predstavíme ako klasické systémy? **[2 body]**

3. *rozptyl v jednom rozmere*
(a) Na prednáške sme vypočítali tok hustoty pravdepodobnosti pre voľnú časticu v troch rozmeroch, ktorá mala ostrú hodnotu hybnosti v smere osi z. V jednorozmernej rozptylovej úlohe si môžeme predstaviť, že situácia je síce trojrozmerná, ale dynamika závisí len od premennej x, a zvyšné súradnice y a z sú nepodstatné priečne súradnice, teda, že vlnoplochy sú roviny kolmé na os x, a rovnako potenciál je pri danom x konštantný pre všetky y a z.

Gradienty v definícii toku hustoty pravdepodobnosti sú potom len deriváciou podľa x a $\vec{j}$ má iba komponentu j_x.
Na prednáške sme redukovali jednorozmernú rozptylovú úlohu na úlohu, kde v oblasti I existuje dopadajúca vlna s amplitúdou A aj odrazená vlna s amplitúdou $A' = rA$, a v oblasti III vlna s amplitúdou tA. Zdôraznili sme, že komplexné koeficienty odrazu a prechodu r a t sú kľúčovými veličinami, ktoré chceme v takomto rozptyle zistiť.
Na základe vyššie opísanej parametrizácie vlnových funkcií určte tok hustoty pravdepodobnosti v oblasti I a takisto v oblasti III.
Čo plynie zo zachovania tohto toku pri prechode potenciálovou oblasťou II pre vzťah medzi $|r|^2$ a $|t|^2$? *Toto je elegantný výsledok platný pre každý potenciál.* **[2 body]**

4. *klasický opis pružného rozptylu na tvrdom valci*
Tento príklad nemá nič spoločné s kvantovou mechanikou, ide tu o precvičenie rozptylu podľa klasickej mechaniky. Príklad má blízko k rozptylu na tvrdej guli z prednášky. Uvažujme pružný rozptyl na dlhom tvrdom valci o polomere R, pričom rozptylované častice dopadajú zo smeru kolmého na os valca. Použijúc polárne súradnice $(\rho,\ \vartheta,\ z)$, kde os z je v smere osi valca, kvôli symetrii úlohy nebude žiadna závislosť na z a úlohu možno chápať ako rozptyl v dvoch rozmeroch na tvrdom kruhu. Alternatívne, môžme ostať v troch rozmeroch a hovoriť o rozptyle na jednotku dĺžky valca. Napríklad účinný prierez (diferenciálny aj celkový) môžme zaviesť na jednotku dĺžky valca L; bude to dvojrozmerný výsledok vynásobený s L.

Tipnite si, do ktorého smeru sa bude rozptyľovať najviac častíc. Bude to dopredu, doboku, či odraz naspäť?

Potom určte, ako závisí zrážkový parameter b na uhle rozptylu ϑ. Z toho spočítajte veličinu, ktorá je tu analogická diferenciálnemu účinnému prierezu a celkovému účinnému prierezu. Porovnajte najpravdepodobnejší smer rozptylu s vašou domnienkou na začiatku, keď ste to ešte len tipovali. Zamyslite sa nad rozdielom medzi valcom a guľou a vysvetlite, že váš výsledok dáva zmysel.

Spočítajte celkový účinný prierez. Dostávate zhodu so zdravým sedliackym rozumom?
Pomôcka: Pri redukcii na dva rozmery máme stále ešte aj symetriu medzi hornou a dolnou polrovinou. Predpokladajúc, že častice dopadajú zľava v smere

osi x, je to symetria voči zámene y na $(-y)$. Stačí preto uvažovať rozptyl na hornej polovici valca (v 2 rozmeroch je to horná polovica kruhu). ***Celkový účinný prierez*** *je potom pre horný polpriestor (v 2 rozmeroch hornú polrovinu) plocha RL, kde L je jednotková dĺžka valca (v dvoch rozmeroch delíme s L a dostaneme ako celkový účinný prierez úsečku dĺžky R). Lebo to je priečna plocha (rozmer), ktorú vidia ako prekážku dopadajúce častice v hornom polpiestore (hornej polrovine). Pre celý valec to bude dvakrát viac samozrejme. Spomeňme si, že pre tvrdú guľu to bol jej priemet do priečnej roviny čiže plocha kruhu πR^2. Vo všeobecnosti celkový účinný prierez pre rozptyl na tvrdom telese je plocha tieňa, ktorý vrhá tvrdé teleso, ak naň svietime rovnobežnými lúčmi svetla zo smeru, odkiaľ dopadajú častice.* **[2 body]**

5. *klasický opis (pružného) Rutherfordovho rozptylu*
Na prednáške sme povedali, že kľúčovým vzťahom pre klasický rozptyl je závislosť zrážkového parametra b od uhla rozptylu ϑ. *Logika by to chcela naopak, ako od b závisí ϑ, ale matematicky sa hodí určiť $b = b(\vartheta)$.* Diferenciálny úč.prierez potom nájdeme z toho, že $d\sigma = 2\pi\, b\, db$ a $d^2\sigma = b\, db\, d\varphi$. Viď príklad pre tvrdú guľu na prednáške.
(a) Povedali sme, že pre Rutherfordov rozptyl možno odvodiť (ale nebudeme to tu robiť) $b = \frac{D}{2}\frac{1}{tan\frac{\vartheta}{2}}$. Odvoďte z tohto výsledku klasický diferenciálny účinný prierez pre tento rozptyl.

(b) Dĺžkový parameter D je rovný minimálnej vzdialenosti pri čelnej zrážke alfa častice (náboj ze) s jadrom zlata (náboj Ze). Určte túto vzdialenosť z danej kinetickej energie E alfa častice pri emitovaní z rádioaktívneho zdroja. Potom dosaďte a porovnajte Váš výsledok pre diferenciálny účinný prierez s klasickým Rutherfordovým výsledkom prebraným v niektorom z Vašich predchádzajúcich kurzov. **[2 body]**

6. *rozptyl v kvantovej teórii v iných svetoch*
(a) Uvažujme rozptyl v kvantovej teórii v dvojrozmernom svete. Ako by mala vyzerať závislosť $\Psi_{out}(\vec{r})$ na polárnych súradniciach (ρ, φ) ďaleko od počiatku? Navrhnite a vysvetlite.

(b) Uvažujme rozptyl v kvantovej teórii v štvorrozmernom svete. Ako by mala vyzerať závislosť $\Psi_{out}(\vec{r})$ na sférických súradniciach $(r, \Theta, \theta, \varphi)$ ďaleko od počiatku? Navrhnite a vysvetlite. **[2 body]**

7. *bonus príklad*
Na základe predchádzajúceho príkladu definujte vhodnú analógiu diferenciálneho účinného prierezu v 2-d a 4-d svetoch a určte jeho závislosť od amplitúdy rozptylu v týchto svetoch.
Má dif.úč.prierez stále rozmer plochy? **[2 body]**