

Úvodné cvičenie z kvantovej teórie 2

1. spin

Napíšte S_x , S_y , S_z a $S_{\vec{n}}$ v spinorovej reprezentácii.

Napíšte ich vlastné vektory, overte (stačí hoci len pohľadom), že sú na seba ortogonálne pre každý uvažovaný priemet spinu.

Presvedčte sa, že pre $\vec{n} = (1, 0, 0)$, a neskôr pre $\vec{n} = (0, 1, 0)$ a pre $\vec{n} = (0, 0, 1)$ výsledky pre $S_{\vec{n}}$ sa naozaj zredukujú na odpovede pre S_x , S_y a S_z .

2. spin

(a) Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, kde $a, b \neq 0$, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z a s akými pravdepodobnosťami nameriame prístrojom?

Aká je stredná hodnota merania S_z na týchto elektrónoch?

(b) Aká je normovacia podmienka pre a a b ? Musí byť splnená, ak chceme správne zodpovedať otázku o pravdepodobnostiach v časti (a)?

(c) To isté, ako v časti (a), ale pre otočený SG prístroj, ktorého nehomogénne magnetické pole (a teda výnimočný smer) je v smere osi x a pýtame sa na S_x namiesto S_z .

Poznámka: Odpovede v (c) sa líšia od (a) preto, lebo sme raz a navždy zafixovali bázu - celkom na začiatku ešte vo všeobecnom formalizme - ako stavy spinu "hore" a "dolu" voči osi z . Z toho je potom matica S_z diagonálna a S_x a S_y nie sú diagonálne, čo má dôsledky pre tvar ich vlastných vektorov. Vlastné vektory matice S_z majú jednoduchý tvar, z nich sa ľahko určia pravdepodobnosti v (a). Na rozdiel od zložitejších vlastných vektorov matíc S_x a S_y .

3. spin

(a) Uvažujme dve $N \times N$ matice A a B , ktoré sú síce rôzne, ale obe sú diagonálne. Dokážte priamym dôkazom, že tieto matice komutujú pre ľubovoľné prirodzené číslo N .

(b) Vychádzajúc z tvrdenia v (a), z komutačných vzťahov medzi maticami S_x , S_y a S_z ako aj z faktu, že podľa definície je S_z diagonálna, dokážte, že S_x a S_y nemôžu byť diagonálne matice.

(c) Presvedčte sa priamym výpočtom, že matice S_y a S_z skutočne spĺňajú

komutačný vzťah $[S_y, S_z] = i\hbar S_x$ analogicky k $[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$ pre operátory orbitálneho momentu hybnosti, ktoré boli zadané pomocou derivácií v zinnom semestri.

4. *spin*

(a) Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aká je stredná hodnota merania S_z nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?

Aké je $\overline{S_z^2}$ a ΔS_z ? *Dávajú vaše odpovede zmysel?*

(b) Ako bol natočený SG prístroj, ktorý pripravil počiatočný spinový stav?

5. *spin*

Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aká je stredná hodnota merania S_x nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?

6. *poruchová teória pre nedegenerovaný prípad*

Napište vzťah, ktorým vo všeobecnosti počítame korekciu k energii E_n (n -tý excitovaný stav) v prvom ráde poruchovej teórie po zapnutí poruchy H' - spravidla touto poruchou bude dodatočný potenciál $V'(x)$.

Vysvetlite fyzikálne (môžte stručne napísať), čo tento vzťah znamená.

7. *poruchová teória pre nedegenerovaný prípad*

Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .

Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie nulová. Svoju odpoveď zdôvodnite.

8. *poruchová teória pre nedegenerovaný prípad*

Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .

Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie väčšia ako korekcia k energii prvého excitovaného stavu. Svoju odpoveď zdôvodnite.

9. poruchová teória pre nedegenerovaný prípad

Uvažujme časticu viazanú na úsečke dĺžky L .

Na časticu pôsobí poruchový hamiltonián popísaný spojitou funkciou, ktorá je nulová na koncoch úsečky, pre $x \in (0, L)$ je kladná a má jedno výrazné maximum v strede úsečky. Vysvetlite, akým spôsobom sa zmení emisná čiara odpovedajúca prechodu častice z prvého excitovaného do základného stavu po zapnutí tejto poruchy.

10. poruchová teória pre nedegenerovaný prípad

Atóm vodíka v základnom stave umiestnime do konštantného vonkajšieho elektrického poľa \vec{E}_{ext} v smere osi z . Napíšte poruchový hamiltonián odpovedajúci pôsobeniu poľa \vec{E}_{ext} na elektrón a určte korekciu k energii elektrónu v prvom ráde poruchovej teórie.