Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.1

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 01.10.2024

1. *fundamentálne konštanty*
(a) Napíšte definíciu bezrozmernej konštanty jemnej štruktúry α.

(b) Napíšte jej približnú číselnú hodnotu v tvare $1/X$, kde X je celé číslo. *Odpovede si treba pamätať.*

(c) Vychádzajúc z rozmerov konštánt e^2, ϵ_0, $\hbar$ a c v definícii dokážte, že coulomby, metre, sekundy kilogramy sa navzájom vykrátia a ponechajú veličinu α naozaj bezrozmernú.

(d) Čo má bezrozmerná konštanta jemnej štruktúry α fyzikálne spoločné s α časticou, keďže sa rovnako volajú? *Pomôcka je na konci bónusového príkladu.*

(e) Vypočítajte, akej chyby (v porovnaní s 1% či 2%) sme sa dopustili pri uvažovaní hodnoty $\alpha = 1/X$ a zaokrúhlení X na celé číslo.
Pomôcka: $\hbar = 1.054571800 \times 10^{-34}$ Js, $c = 2.99792458 \times 10^{8}$ m/s a presnú hodnotu ϵ_0 v SI sústave pohľadajte sami, napr. na internete. **[2 body]**

2. *presnosť približnej hodnoty súčinu $\hbar c$*
(a) Súčinu $\hbar c$ ste sa venovali už aj na cvičení. Jeho jednoduchú a pritom dôležitú hodnotu v jednotkách eV m ste tam však neoverili, iba sa odvolalo na výsledok napísaný na prednáške. Pre úplnosť vypočítajte teraz za pomoci kalkulačky presnú hodnotu tohto súčinu v jednotkách eV m na tri desatinné miesta. Použite presné hodnoty pre $\hbar$ a c zo záveru predchádzajúceho príkladu, prípadne si ako vstup pohľadajte rovnako presnú hodnotu $\hbar$ v jednotkách eV s.

(b) Približná hodnota $\hbar c$ v jednotkách eV m (resp. ich desiatkových násobkov), ktorú sme začali používať, sa teda ľahko pamätá. Budeme ju často používať aj naďalej. Je pri tom dôležité vedieť, akej chyby sa dopúšťame. Je to menej ako *(i)* 1%, *(ii)* 2%, alebo až *(iii)* 5% ?

(c) Akej chyby - v percentách - sa približne dopustíme, ak sa rozhodneme použiť $\hbar c = 200\,\mathrm{MeV}\,10^{-15}$m, kde 10^{-15}m je jeden fermi? **[2 body]**

3. *využitie súčinu $\hbar c$ pri praktickom počítaní*
Jednoduchá a ľahko zapamätateľná numerická hodnota pre súčin $\hbar c$ nám umožňuje rýchlo počítať bez kalkulačky, ak sa $\hbar c$ vyskytuje v nejakom výsledku a ak nám stačí výsledok s presnosťou na úrovni pár percent. Dokonca aj ak sa $\hbar c$ vo výsledku nevyskytuje, ale je tam samotné $\hbar$, alebo c, pri rýchlom počítaní môže byť užitočný trik rozšíriť konštantu napr. $\hbar$ na $(\hbar c)/c$.

(a) Určte **bez použitia kalkulačky** farbu (t.j. vlnovú dĺžku) svetla prvej (v skutočnosti najintenzívnejšej) viditeľnej čiary v spektre atómu vodíka vychádzajúc z $E_n = E_1/n^2$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) a $E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$.
Nakoľko výsledok nášho počítania nemusí byť super presný, konštanty možno zaokrúhľovať na pár percent. Napríklad $2\pi \approx 6.3$ *alebo - ak sa naozaj veľmi veľmi ponáhľate -* $2\pi \approx 6$ *je na hranici akceptovateľnosti (ale nie je dobre si zvykať na takúto hrubú aproximáciu mimo rádových odhadov).*

(b) Podobne bez použitia kalkulačky ukážte, že v spektre vodíka sa nenachádza žltá čiara.

(c) Aká je farba ďalšej spektrálnej čiary atomárneho vodíka, ktorá nasleduje po červenej čiare? Odpoveď dajte na základe vlastného výpočtu - vo Vašom riešení - vlnovej dĺžky tejto čiary, a nie na základe obrázku z internetu (ten môžte použiť na overenie svojho výsledku). **[2 body]**

4. *výhodnosť jednoduchého výsledku pre súčin $\hbar c$*
Bez kalkulačky odhadnite/vypočítajte (z vyššie povedaného) čo najpresnejšie hodnotu $(\alpha\hbar c/2a)$, kde a je Bohrov polomer. Máme na mysli použitie približných hodnôt pre α, $\hbar c$ a a pri výpočtoch "na prstoch".

Skúste odhadnúť chybu výsledku.

Vypočítajte teraz túto hodnotu ešte raz s presnosťou na štyri platné číslice, s pomocou kalkulačky. Hodnotu a s potrebnou presnosťou pozrite na internete.

Viete rozoznať, akej fyzikálnej veličine je rovný Váš výsledok? Napadlo by Vás to z približného výsledku "na prstoch"? **[2 body]**

5. *minimalizácia typickej energie atómu $E(r)$ z prednášky*
Na prvej prednáške sme odvodili, odkiaľ sa berie (rádovo) typický rozmer atómov r_{ATOM} a typická energia E_{ATOM}. Vysvetlili sme, že ich dostaneme minimalizáciou nerelativistického výrazu pre energiu $E(r)$ elektrónu v Colulombovskom elektrostatickom poli protónu so započítaním princípu neur-

čitosti. Matematické úpravy sme preskočili a na tabuľu napísali už len výsledky. Vašou úlohou je tu skompletizovať matematické úpravy a dopočítať preskočené odvodenie pre minimum $E(r)$, a teda odvodiť vzťahy pre r_{ATOM} a E_{ATOM}.
Zároveň načrtnite graf funkcie $E(r)$ a vyznačte, kde sa v ňom nachádza r_{ATOM} a E_{ATOM}. **[2 body]**

6. *limitné prípady k výsledkom pre* r_{ATOM} *a* E_{ATOM}
(a) Vo výsledkoch príkladu **5.** vystupuje rýchlosť svetla c. To zdanlivo vyzerá byť v rozpore s tvrdením, že elektrón možno uvažovať ako nerelativistický. V nerelativistickej fyzike konštanta c nevystupuje, nerelativistický opis dostávame z relativistického v limite $c \to \infty$. Dosadením za α ukážte, že r_{ATOM} a E_{ATOM} nie sú v skutočnosti závislé na c a teda sa nezmenia, ak budeme uvažovať nerelativistickú limitu $c \to \infty$.

(b) Klasickú mechaniku dostávame z kvantovej teórie v limite $\hbar \to 0$. Vidno to napríklad zo vzťahu neurčitosti $\Delta x \Delta p_x \simeq \hbar$. Možno povedať, že touto limitou vypíname kvantovú povahu sveta.
Čomu vychádza rovný rádový odhad pre E_{ATOM} a r_{ATOM} v tejto klasickej limite?
Okomentujte, či sú tieto výsledky v zhode s tým, čo očakávame od klasickej fyziky.

(c) Čomu vychádza rovný rádový odhad energie a veľkosti atómu v limite, keď hmotnosť elektrónu $m_e \to 0$?
Zamyslite sa nad veľkosťou atómu v limite, keď $m_e \to 0$, ale nie je presne rovné nule. Aký atóm vtedy dostávame? S akými dôsledkami pre veľkosť proteínov, buniek, ... živých bytostí, hviezd a planét, ak by existovali?
Existovali by atómy, keby elektrón nemal hmotnosť?
V súčasnosti sme presvedčení, že elektrón má hmotnosť vďaka prítomnosti nenulového Higgsovho poľa v celom priestore. Porozumieť tomu viac možno v 5.ročníku na prednáške o štandardnom modeli (ŠM). Objav Higgsovho bozónu v r.2012 na urýchľovači LHC tak nepriamo vniesol hlbšie porozumenie aj do pôvodu stability atómov. Podľa ŠM bez Higgsovho poľa by mal elektrón nulovú hmotnosť a ako sme sa práve presvedčili, atómy by nevznikli. **[2 body]**

7. *ťažšie atómy s jedným elektrónom*
Uvažujme jediný elektrón viazaný k jadru hélia, lítia, prípadne ďalších ťažších prvkov, vo všeobecnosti s počtom protónov v jadre rovným Z. Tieto

atómy sú teda čiastočne ionizované, ostal im už len jeden elektrón. Určte, čomu sú rádovo rovné typické väzbové energie elektrónu v takýchto atómoch voči typickej energii elektrónu v atóme vodíka. Sú väčšie, menšie, rovnaké? Koľkokrát? Dáva vaša odpoveď zmysel?
Pomôcka: Prihliadnite na to, že možno zopakovať výpočet z príkladu **5.** *s rozdielom, že teraz je potenciálna energia elektrónu rovná* $-(Z\alpha\hbar c)/r$.

(b) Ako je to s rádovým odhadom typického rozmeru takýchto čiastočne ionizovaných atómov v porovnaní s rozmerom atómu vodíka? Sú tieto ióny väčšie alebo menšie? Koľkokrát? Dáva vaša odpoveď zmysel? **[2 body]**

8. *spektrálne čiary ťažších prvkov s čiastočne ionizovanými atómami s jedným elektrónom*
Na základe predchádzajúcej odpovede uvažujte spektrálne čiary čiastočne ionizovaného hélia. Je medzi nimi spektrálna čiara žltej farby? **[2 body]**

9. *voľne súvisiace s centrálnou limitnou teorémou (CLT)*
(a) Načrtnite priebeh funkcie na reálnej osi $\rho_{Gauss}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, vyznačte v náčrtku (*s pomenovanými osami*) význam parametrov μ a σ a vďaka pomocnému integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ sa presvedčte, že táto gaussovská hustota pravdepodobnosti je správne normovaná.

(b) Slovne vysvetlite, čo to znamená, že nejaká funkcia je *hustotou pravdepodobnosti.*

(c) Slovne **vysvetlite**, prípadne dajte aj príklad, či môže nejaká funkcia byť *hustotou pravdepodobnosti* a pritom dosahovať hodnoty väčšie ako 1.

(d) Uvažujme reálnu spojitú ohraničenú funkciu na reálnej osi, s nezáporným oborom hodnôt. Môže byť každá takáto funkcia *hustotou pravdepodobnosti*? Ak áno, prečo? Ak nie, aké kritérium treba ešte dodať, aby už bola *hustotou pravdepodobnosti*? **[2 body]**

10. *priamo súvisiace s centrálnou limitnou teorémou (CLT)*
(a) Pri výklade CLT sme uvažovali *vzorku*, resp. sadu N meraní (ako príklad sme hovorili 20) veličiny x, z ktorej vypočítame *strednú hodnotu* $\overline{x}$ ako aritmetický priemer. V ďalšom kroku neuvažujeme len jednu takúto vzorku, ale n vzoriek. Ku každej vzorke vypočítame $\overline{x}$. Možno si to predstaviť napríklad tak, že n ľudí meria veličinu x, každý N ráz a z týchto meraní nám každý

oznámi svoje $\overline{x}$. Nezaujímame sa o jednotlivé merania jednotlivých ľudí, ale iba o n stredných hodnôt $\overline{x}$, ktoré nahlásia. Tieto stredné hodnoty sa budú líšiť a my tak dostaneme rozdelenie stredných hodnôt $\rho(\overline{x})$ - pozor, to už nie je rozdelenie pre meranú veličinu x. Pre $\rho(\overline{x})$ už platí CLT. Prakticky je $\rho(\overline{x})$ viditeľne dobre gaussovské už pre $n > 30$ a to bez ohľadu na to, ako je rozdelená náhodná veličina x.
Na prednáške sme uvažovali príklady, kde bolo pôvodné rozdelenie $\rho(x)$ veličiny x buď rovnomerné (konštantné) alebo exponenciálne, pre jednoduchosť na konečnom intervale $x \in <0, 1>$.
V špeciálnom prípade môže byť aj rozdelenie veličiny x gaussovské. Uvažujme v ďalšom takéto gaussovské rozdelenie veličiny x na reálnej osi s parametrami μ a σ, ako v časti **8.***(a)*. Vtedy môžme povedať o niečo viac: $\rho(\overline{x})$ je gaussovské s parametrami μ a $\sigma/\sqrt{N}$. Vysvetlite, či je posledné tvrdenie v poriadku v limite $N = 1$, teda ak každá vzorka obsahuje len jedno meranie: každý z n ľudí meria iba raz. A podobne, či je tvrdenie v poriadku v limite $N \to \infty$, teda ak vzorky obsahujú veľmi veľa meraní, resp. každý z ľudí hlási strednú hodnotu $\overline{x}$ z veľmi veľkého počtu meraní. V každom z týchto dvoch limitných prípadov načrtnite priebeh $\rho(\overline{x})$ a porovnajte ho s $\rho(x)$.

(b) Načrtnite, ako sa líšia dve gaussovské rozdelenia $\rho(\overline{x})$, ak sme jedno dostali zo vzoriek s 10 meraniami a druhé zo vzoriek so 40 meraniami (štyrikrát viac meraní v každej z n vzoriek). V náčrtku zohľadnite, že každé z týchto rozdelení musí byť normované "na jednotku", teda tak, aby bola plocha pod krivkou $\rho(\overline{x})$ rovná 1. **[2 body]**

11. *bonus príklad - princíp neurčitosti a gravitačne viazané stavy*
Aký je typický rozmer gravitačne viazanej sústavy dvoch peľových zrniek o hmotnosti 10^{-13}kg, ak zoberieme do úvahy princíp neurčitosti?
Takéto malé peľové zrnká majú polomer pár mikrometrov. Budú sa dotýkať alebo už budú oddelené vďaka princípu neurčitosti? Možno teda niekde v beztiažovom stave vo vákuu pozorovať kvantové javy na peľových zrnkách? **[2 body]**

Pomôcka k príkladu **1.***(d)*: NIČ.