Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.2

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 11.10.2024

1. *častica na úsečke dĺžky L: základné otázky*
(a) Na prednáške sme napísali vlnové funkcie Ψ_n pre stavy častice s energiou E_n a načrtli ich tvar spolu s odpovedajúcou hustotou pravdepodobnosti výskytu častice na úsečke *pre tri najnižšie* hodnoty n.
Napíšte *nasledujúcu* vlnovú funkciu, načrtnite jej tvar a tiež načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v tomto stave na úsečke. *Dajte si záležať na správnom tvare kopčekov vo Vašom náčrtku.*
Čomu je tu rovné kvantové číslo n?
Koľký excitovaný stav to je?

(b) Kde vo vnútri úsečky je najväčšia pravdepodobnosť nájsť časticu pri meraní jej polohy v stave uvažovanom vyššie?

(c) Sú vo vnútri úsečky body, v ktorých túto časticu určite nenájdeme? *Presnejšie by sme mali hovoriť o bodoch s ich maličkým epsilonovým okolím.* Ak áno, ktoré body to sú?

(d) Zamyslite sa ešte raz nad grafom hustoty pravdepodobnosti výskytu častice v tomto stave. Čo by ste povedali na otázku: *Ako môže táto častica prechádzať po úsečke cez tie miesta, kde je jej hustota pravdepodobnosti výskytu nulová?* **[2 body]**

2. *častica na úsečke: základné otázky - pokračovanie*
(a) Môže byť častica v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi_n(x)$ a s energiou E_n, kde $n = 0$? Odpoveď vysvetlite.

(b) Rovnaká otázka pre $n = \frac{1}{2}$.

(c) Uvažujme časticu o hmotnosti m viazanú na úsečke dĺžky ℓ a inú časticu s dvojnásobnou hmotnosťou viazanú na úsečke dĺžky $L \neq \ell$. Je možné, aby mali tieto dve sústavy rovnaké energetické spektrum? Odpoveď vysvetlite. **[2 body]**

3. *častica na úsečke: Δx v stacionárnych stavoch*
(a) Vypočítajte strednú kvadratickú odchýlku polohy Δx častice v stavoch

Ψ_n .
Závisí Váš výsledok na n? Prečo vopred vieme, že odpoveď je áno, závisí. *Odpoveď na túto otázku už padla na prednáške, ale tu ju ešte raz vysvetlite.*

(b) Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v limite $n \to \infty$. V tomto prípade sa táto hustota pravdepodobnosti blíži k rovnomernému rozdeleniu (aj to načrtnite). Vypočítajte Δx pre rovnomerné rozdelenie a ukážte, že Váš výsledok z časti *(a)* je v limite $n \to \infty$ rovnaký. **[2 body]**

4. *častica na úsečke: energetické spektrum*
(a) Pripomeňme, že nemeriame energie častice v stavoch Ψ_n, ale len jej spektrum, teda energiu žiarenia pochádzajúcu z preskokov medzi hladinami. Vymenujte desať najnižších meraných hodnôt takejto emisnej energie pre časticu na úsečke. Odpovedajte v násobkoch $E_1 = (\pi^2\hbar^2)/(2mL^2)$. Uvažujte aj preskoky medzi *nesusednými* hladinami.

(b) Uvažujme desať spektrálnych čiar z časti *(a)*. Nech je časticou elektrón. Vypočítajte, z akého intervalu má byť dĺžka úsečky, aby boli všetky tieto čiary z viditeľné voľným okom.
Za viditeľnú budeme považovať čiaru s vlnovou dĺžkou od $350\,nm$ *do* $760\,nm$. *Individuálne môže byť tento interval mierne rôzny pre rôznych ľudí.*
Ak sa nám práve podarilo vtesnať desať prvých spektrálnych čiar takéhoto elektrónu do viditeľnej časti spektra, sú zvyšné emisné spektrálne čiary z infračervenej alebo z ultrafialovej časti elmag spektra? **[2 body]**

5. *častica na úsečke: superpozícia*
Diskutovali sme merania energie na častici, ktorej vlnová funkcia bola $\Psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2(x)$ a dali sme predpoveď pre strednú hodnotu a strednú kvadratickú odchýlku týchto meraní, ako násobok E_1. Zopakujte tieto dve predpovede pre časticu, ktorej vlnová funkcia je

(a) $\Psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_3(x)$

(b) $\Psi_b(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}\Psi_2(x) + \frac{1}{\sqrt{5}}\Psi_3(x)$

(c) $\Psi_c(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Psi_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Psi_2(x) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\Psi_3(x)$.

(d) Navrhnite vlastné c_1, c_2 a c_3, aby bola stredná hodnota energie rovná $2E_1$ v stave častice popísanom vlnovou funkciou
$\Psi_d(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x) + c_3\Psi_3(x)$. **[2 body]**

6. *častica na úsečke: superpozícia*
Na cvičení sme v 4.príklade uvažovali časový vývoj funkcie $\Psi_+(x,\, t)$ a našli sme "hrb" v dvoch krajných polohách. Vypočítajte ako na čase závisí stredná hodnota merania polohy $\overline{x}(t)$ častice v uvedenom stave. Pointou je, že by Vám mal výjsť harmonický časový vývoj. Aká je jeho ω a amplitúda? **[2 body]**

7.= A1. *Zbierka, str.44 (tlačená verzia) a str.33 (pdf).*
Uvažujme časticu na úsečke $< 0, L >$ v stave popísanom vlnovou funciou $\Psi(x) = Ax(L-x)$. Načrtnite vlnovú funkciu častice.

Vypočítajte pravdepodobnosť $P(E_1)$ namerať v tomto stave častici energiu základného stavu E_1. Vyhodnoťte $P(E_1)$ ako desatinné číslo. *Ako prvé vypočítajte najskôr A. Odporúčame pritom položiť $L = 1$ a využiť* $\int_0^1 = t^M (1-t)^N dt = \frac{M!\,N!}{(M+N+1)!}$.
Čo sa dá bez počítania povedať o $P(E_2)$?
Čo sa dá bez počítania povedať o všetkých ostatných $P(E_n)$, $n > 2$?

Vychádzajúc z náčrtku $\Psi(x)$ okomentujte, prečo pre $P(E_1)$ vychádza taký výsledok, aký vychádza. Bez počítania, len na základe výsledku $P(E_1)$ odhadnite $P(E_3)$. *Myslíme naozaj $P(E_3)$ a nie $P(E_2)$.* Odpoveď vysvetlite.
[2 body]

8.= A12. *Zbierka, v tlačenej verzii na str.19. Nadväzuje na príklad **A11.***
Vychádzajúc zo sily (predchádzajúci príklad, **A11.** v Zbierke) odhadnite tlak, ktorým pôsobí elektrón uzavretý v kocke s hranou a na steny kocky.
Bude to len rádový odhad, pre ktorý si predstavujeme elektrón pôsobiaci na krajoch úsečky, akoby tlačil na plochu štvorca a^2. a je tu Bohrov polomer.

Porovnajte s atmosferickým tlakom, t.j. určte ich pomer.

Pre akú veľkú kocku vychádza tlak rovný atmosférickému tlaku? **[2 body]**

9. *Elektrón v atóme vodíka.*
Elektrón v základnom stave atómu vodíka má vlnovú funkciu v tvare

$$\Psi(\vec{r}, t) \;=\; A\, e^{-r/a}\, e^{-iE_1 t/\hbar},$$

kde a je Bohrov polomer a $E_1 = -\frac{1}{2} mc^2\,\alpha^2 = -13.6\,\mathrm{eV}$.

Ako sa mení v čase hustota pravdepodobnosti výskytu elektrónu?

Keby ste mali možnosť merať polohu $\vec{r}$ iba raz, kde by ste elektrón hľadali? T. j., aká je najpravdepodobnejšia poloha elektrónu? Mení sa v čase? *Poloha $\vec{r}$ v skutočnosti znamená infinitezimálne malý objem centrovaný v mieste $\vec{r}$.*

Vypočítajte normovaciu konštantu A.
Potom urobte predpoveď pre strednú hodnotu merania súradníc x, y a z.
Určte neurčitosť merania x-ovej súradnice (strednú kvadratickú odchýlku) Δx. *Čomu sa rovnajú Δy a Δz ? Pomocou vzťahov medzi $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ a $\overline{z^2}$ možno zjednodušiť počítanie $\overline{x^2}$ a teda aj Δx. Využite k tomu sférickú symetriu sústavy a vzťah $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, pričom najskôr vypočítate $\overline{r^2}$.*

Ďalej vypočítajte predpoveď pre strednú hodnotu $\overline{r}$ merania vzdialenosti elektrónu od jadra.
Pripomeňme, že podľa Bohrovho postulátu tento elektrón krúži sťaby klasická častica po kružnici s polomerom a. Tiež podľa odhadov typického rozmeru vodíkového atómu (z princípu neurčitosti, naša prvá prednáška) by malo výjsť niečo ako a. Porovnajte tieto predpovede s výsledkom.

Určte neurčitosť Δr. *Malo by to ísť bez zdĺhavého počítania.*

Pomocný integrál: $\int_0^\infty t^N e^{-t} dt = N!$ **[3 body]**

10. *častica na úsečke: prechod ku klasickej fyzike*
a) Nech je častica v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = A \sum_{n=91}^{110} \Psi_n(x)$, kde $\Psi_n(x) = \sqrt{2/L}\,\sin nx$ a A je normovacia konštanta. Jednotky dĺžky sme zaviedli také, že v nich $L = \pi = 3.14$ a $\sin \frac{n\pi x}{L}$ sa zjednoduší na $\sin nx$.
Nechajte si vykresliť túto funkciu nejakým grafickým programom (postačí napr. zadať ju do Google Search s hodnotou A=1, a vhodne nastaviť škálovanie na osiach obrázka) a obrázok zhruba prekreslite pre $x \in < 0, 3.14 >$.
Možno povedať, že táto častica sa nachádza v nejakom úzkom intervale na úsečke? Ak áno, kde?

(b) Určte normovaciu konštantu A funkcie $\Psi(x)$.

(c) To isté, čo v *(a)*, len teraz $\Psi(x) = A \sum_{n=91}^{110} (-1)^n \Psi_n(x)$ (alternujú znamienka). Kde je zhruba lokalizovaná častica v tomto stave?

(d) Navrhnite svoju vlastnú normovanú superpozíciu rôznych dvadsiatich funkcií $\Psi_n(x)$ s $n \gg 1$, aby bola častica v tomto stave lokalizovana v tesnom okolí stredu úsečky. Znázornite si ju graficky na počítači a približne prekreslite do riešenia, alebo vytlačte váš obrázok.

Návod: Možno sa napr. poučiť z tvaru $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$, atď, ktoré z nich a s akým znamienkom maximalizujú pravdepodobnosť výskytu častice v polovici úsečky. **[3 body]**

11. *bonus príklad*
Určte Fermiho energiu v dvoch rozmeroch, teda pre elektróny viazané na štvorec, – analogicky k nášmu výpočtu pre trojrozmerný prípad keď sú elektróny viazané v kocke. **[2 body]**