Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

## Sada č.3

*riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 18.10.2024*

**1.** *častica na úsečke - rádový odhad energie z rozmerovej analýzy*
Uvažujme kvantovú časticu o hmotnosti $m$ na úsečke dĺžky $L$. Jej typickú energiu môžeme rádovo odhadnúť z rozmerovej analýzy, z mocnín $\hbar$, $m$ a $L$: $E = \hbar^\alpha m^\beta L^\gamma$. Vypočítajte exponenty $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ a porovnjte tento odhad E z rozmerovej analýzy s energiou základného stavu častice $E_1 = \pi^2\hbar^2/(2mL^2)$.

Energiu elektrónu v atóme vodíka sme rádovo odhadli iným spôsobom: navrhli sme nerelativistický vzťah pre súčet $E_{kin} + E_{pot}$, vyjadrili sme hybnosť v $E_{kin}$ pomocou vzťahu neurčitosti a našli sme minimum $E(r)$. Možno tento postup použiť aj na odhad energie častice na úsečke?
*Pomôcky: Čomu je rovná potenciálna energia častice vo vnútri úsečky? Je častica na úsečke izolovaná sústava? Pozrite príklad* **7.** *z tretieho cvičenia.*
**[2 body]**

**2.** *energia elektrónu v atóme vodíka z rozmerovej analýzy*
Určte typickú energiu elektrónu v atóme vodíka z rozmerovej analýzy, pričom za základné parametre budete považovať $\hbar$, $m$ a $e^2/(4\pi\varepsilon_0)$. Výsledok porovnajte s energiou, ktorú sme dostali ešte na prvej prednáške z odhadu pomocou vzťahu neurčitosti. **[2 body]**

**3.** *E jednoduchého harmonického oscilátora (JHO) z rozmerovej analýzy*
Rozmerová analýza sa v predchádzajúcich dvoch príkladoch ukazuje ako užitočný nástroj. Pre veľký úspech preto určte z rozmerovej analýzy aj typickú energiu kvantového JHO, pričom za základné parametre budete považovať $\hbar$, $m$ a $\omega$ (parameter s rozmerom kruhovej frekvencie). Potenciálna energia JHO je $E_{pot} = m\omega^2 x^2/2$. **[2 body]**

**4.** *častica na úsečke*
Uvažujme stav v čase $t = 0$ daný vlnovou funkciou $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_1(x) + i\Psi_2(x)\right)$.

*(a)* Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu tejto častice v čase $t = 0$. *V náčrtku dajte pozor na tvar chvostov a údolia funkcie* $|\Phi(x)|^2$.

*(b)* Napíšte, čomu je rovné $\Phi(x,\, t > 0)$ .
Určte, či je hustota pravdepodobnosti $|\Phi(x,\, t > 0)|^2$ periodická v čase. Ak áno, určte jej periódu $T$ ako násobok $\hbar/E_1$. V odpovedi venujte pozornosť tomu, že perióda je **najkratší** interval, po ktorom sa funkcia "opakuje".

*(c)* Načrtnite **štyri** obrázky, ktorými zdokumentujete, ako sa mení hustota pravdepodobnosti výskytu častice počas jednej periódy pre časy 0, $T/4$, $T/2$, $3T/4$. (*Prvý z nich už máte v časti (a).*)

*(d)* Je stredná poloha častice $\overline{x}(t)$ počas periódy stále rovnaká alebo sa mení? Ak sa mení, popíšte slovne, aký pohyb koná napr. voči stredu úsečky.
Je to harmonické kmitanie? Odpoveď vysvetlite. *Harmonické znamená závislosť od času ako* $\cos\omega t$ *alebo* $\sin\omega t$. **[2 body]**

**5.** *častica na úsečke - výskyt v prvej, druhej a tretej tretine*
Častica na úsečke je v základnom stave. Overte vzťah (4) na str. 42 Zelenej učebnice, resp. na str. 28 v elektronickej verzii pdf.

S akou pravdepodobnosťou sa častica nachádza v druhej tretine úsečky? Odpovedzte bez počítania.

S akou pravdepodobnosťou sa častica nachádza v 3. tretine úsečky? **[2 body]**

**6.** *sústava viacerých neinteragujúcich fermiónov*
Určte, akú energiu a akú degeneráciu má prvý excitovaný stav sústavy piatich vzájomne neinteragujúcich elektrónov viazaných *(i)* vo štvorci, *(ii)* v kocke. **[2 body]**

**7.** *sústava viacerých neinteragujúcich bozónov*
Určte, akú energiu a akú degeneráciu má prvý excitovaný stav sústavy šiestich vzájomne neinteragujúcich bezspinových bozónov viazaných *(i)* vo štvorci, *(ii)* v kocke. **[2 body]**

**8.** *voľná častica*
*(a)* Uvažujme voľnú (nerelativistickú) časticu s hmotnosťou $m \neq 0$. Odvoďte vzťah medzi jej energiou a de Broglieho vlnovou dĺžkou.

*(b)* Pre voľný fotón (vo vákuu), resp. pre každú voľnú časticu s nulovou hmotnosťou platí $E = \frac{hc}{\lambda}$ . Platí tento vzťah aj pre nerelativistickú časticu?

*(c)* Porovnajte energie fotónu a elektrónu, ak má každý de Broglieho vlnovú dĺžku $5000 \cdot 10^{-10}$ m. *Fotón je zo zeleného svetla.* Výsledky udajte v eV a nie Jouloch. V odpovedi využite vzťahy z častí *(a)* a *(b)*. **Silno odporúčame použiť hodnoty $\hbar c$ a $m_e c^2$ a počítať bez kalkulačky.**

*(d)* Podľa výsledku vysvetlite, či bolo možné použiť v časti *(c)* vzťah z časti *(a)*, teda či takýto elektrón je naozaj nerelativistický. **[2 body]**

**9.** *voľná častica, voľne nadväzuje na predchádzajúci príklad*
*(a)* Akú de Broglieho vlnovú dĺžku má voľný elektrón s energiou 4 eV? Narazil by do neutrónu, keby mu tento stál v ceste? Alebo by ho iba zľahka obopol a prešiel okolo neho vďaka svojej veľkej vlnovej dĺžke, akoby tam neutrón ani nebol?

*(b)* Akú de Broglieho vlnovú dĺžku by mal kráčajúci človek, ak by sme ho mohli považovať za voľný kvantový objekt? Môžme vďaka svojim (kvantovým) vlnovým vlastnostiam obopnúť makroskopické predmety, ktoré nám stoja v ceste, akoby tam ani neboli?

*(c)* Akú de Broglieho vlnovú dĺžku má korona vírus (covid-19) šíriaci sa vzduchom? Mohol by nás iba obopnúť a prejsť nepovšimnute okolo nás vďaka svojim kvantovým vlnovým vlastnostiam? **[2 body]**

**10.** *Fermiho energia*
Určte Fermiho energiu z rozmerovej analýzy, predpokladajúc, že závisí len od objemovej hustoty počtu častíc (t.j. elektrónov) a konštánt $\hbar$ a $m_e$.
*Hľadané mocniny uvedených veličín vypočítajte. Postup, pri ktorom budete iba testovať nájdené mocniny, nebude uznaný.* **[2 body]**

**11.** *bonus príklad: sústava veľa neinteragujúcich fermiónov*
Na prednáške sme odvodili vzťah pre Fermiho energiu $E_F$ veľkého počtu $N$ elektrónov v kocke o strane $L$. Výsledok závisel od hustoty počtu elektrónov $\rho = N/L^3$ ako $\rho^{2/3}$.
Výchádzajúc z odvodenia tohto výsledku dokážte, že celková energia základného stavu takejto sústavy mnohých elektrónov je rovná $E = \frac{3}{5} E_F N$. *Výsledok neplatí pre malé $N$ rádu 1, keďže pri odvodení predpokladáme $N \gg 1$.*
*Pomôcka: energia $E_F$ je energia elektrónu v najvrchnejšej obsadenej guľovej vrstvičke o hrúbke $dn_F$ v v prvom oktante priestoru kvantových čísel $(n_x, n_y, n_z)$, pričom $n_F = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$ je polomer tejto vrstvičky. Ener-*

*gia všetkých elektrónov v tejto najvrchnejšej vrstvičke je rovná* $E_F \times$ *objem vrstvičky, lebo na jednotkový objem pripadá jeden kvantový stav, a teda jeden elektrón. Faktor 2 za spiny sa dodá na konci. Zostáva sčítať príspevky do* $E$ *od všetkých vrstvičiek a z výsledku eliminovať* $n_F$ *a* $E_1 = (\pi^2\hbar^2/(2mL^2))$ *v prospech* $E_F$ *a* $N$. **[2 body]**