Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.6

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 19.11.2024

1. *komutátor hermitovských operátorov*
Uvažujme hermitovské operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, ktoré vo všeobecnosti nekomutujú. Ich komutátor je nový operátor $[\hat{A},\, \hat{B}] = i\hat{C}$, kde sme vyňali von i. Dokážte, že $\hat{C}$ je hermitovský operátor.
Návod: odvoďte, čomu sa rovná $\hat{C}^\dagger$ využijúc $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$. Treba tu tiež rozumieť, čo sa pri hermitovskom združení stane s i, resp. čomu sa rovná $i^\dagger$.

Pozn: toto pomocné tvrdenie sme použili na prednáške pri dôkaze vzťahu neurčitosti pre $\Delta A\, \Delta B$. **[2 body]**

2. *komutátory*
(a) Zjednodušte komutátor $[\hat{A},\, \hat{B}\hat{C}]$ na výraz, v ktorom budú už len jednoduché komutátory. *Áno, bolo to už aj na cviku, ale potrebujeme to často, tak to skúste ešte raz a bez pozerania do poznámok z cvika.*

(b) Použite výsledok v *(a)* na výpočet komutátora $[\hat{x},\, \hat{p}^2]$ pomocou známeho výsledku pre komutátor $[\hat{x},\, \hat{p}]$. **[2 body]**

3. *komutátory*
Nadväzujúc na príklad **2.***(b)* určte $[\hat{x},\, \hat{p}^3]$, prípadne aj pre vyššie mocniny operátora $\hat{p}$, aby ste mohli uhádnuť, čomu sa rovná $[\hat{x},\, \hat{p}^N]$ pre ľubovolné prirodzené číslo N. Svoj tip potom dokážte matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou obsahuje dva kroky. Prvým je overenie, že hypotéza (tip) platí pre $N = 1$ a druhým, zvyčajne ťažším krokom je overenie, že ak hypotéza platí pre N, tak z toho vyplýva, že platí aj pre $N + 1$.

$[\hat{x},\, \hat{p}_x^N]$ možno určiť aj z pôsobenia $N-$tej derivácie na $x\Psi(x)$, kde $\Psi(x)$ je ľubovolná kvadraticky integrovateľná funkcia. S použitím Leibnizovho pravidla derivovania súčinu funkcií určte týmto spôsobom hľadaný komutátor. Dostávate zhodu s výsledkom dokázaným matematickou indukciou?
[2 body]

4. *komutátor súradnice a parity*

Na cvičení ste našli $[\hat{p},\, \hat{P}] = -2\hat{P}\hat{p}$. Tu vypočítajte komutátor súradnice a parity.
Výsledok je v istom zmysle podobný výsledku pre $[\hat{p},\, \hat{P}]$. **[2 body]**

5. *komutátory operátorov momentu hybnosti* $[\hat{L}_i,\, \hat{L}_j]$
(a) Na prednáške sme definovali $\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$ a podobne (cyklickou zámenou) pre $\hat{L}_y$ a $\hat{L}_z$. Záleží v týchto definíciách na poradí násobenia operátorov na pravej strane? Ak áno, aký je rozdiel medzi nami definovaným $\hat{L}_x$ a operátorom $\hat{L}'_x = \hat{p}_z\hat{y} - \hat{p}_y\hat{z}$? Ak nie, prečo nie?

(b) Vypočítajte komutátor $[\hat{L}_x,\, \hat{L}_y]$. Dostali ste násobok nejakej zložky operátora momentu hybnosti?

(c) Na základe *(b)* cyklickou zámenou určte, čomu sú rovné komutátory $[\hat{L}_y,\, \hat{L}_z]$ a $[\hat{L}_z,\, \hat{L}_x]$. Pravú stranu vždy vyjadrite pomocou zložiek operátora momentu hybnosti. **[2 body]**

6. *komutátory* $[\hat{L}_i,\, \hat{L}^2]$
(a) Na základe riešenia predchádzajúceho príkladu a zjednodušenia $[\hat{A},\, \hat{B}^2]$ pomocou $[\hat{A},\, \hat{B}]$ vypočítajte komutátor $[\hat{L}_x,\, \hat{L^2}]$, kde $\hat{L^2} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$.

(b) Na základe výsledku *(a)* určte, čomu sú rovné komutátory $[\hat{L}_y,\, \hat{L^2}]$ a $[\hat{L}_z,\, \hat{L^2}]$. **[2 body]**

7. $\hat{L}_z$ *vo sférických súradniciach*
Dokážte, že vo sférických súradniciach platí $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$.
Návod: keďže vieme, čo má výjsť, môžeme začať pravou stranou pôsobiacou na funkciu $\Psi(x,\, y,\, z)$, *kde kartézske súradnice* $x,\, y,\, z$ *chápeme ako funkcie troch nezávislých sférických premenných.* **[2 body]**

8. *príklad na komutujúce operátory*
Uvažujte elektrón v atóme vodíka. Napíšte $\hat{H}$ a $\hat{L}_z$ vo sférických súradniciach a overte, že komutujú. (*Mimochodom, je to jednoduchšie vo sférických alebo v kartézskych súradniciach?*)
Čo z toho vyplýva pre ich vlastné funkcie?
Overte na vlnovej funkcii základného stavu, že je zároveň vlastnou funkciou $\hat{L}_z$. Akú hodnotu orbitálneho momentu hybnosti L_z možno namerať elektrónu v tomto stave? *Poznámka: pre excitované stavy máme degeneráciu hla-*

dín, treba tam pre danú degenerovanú energetickú hladinu E_n vyberať správne lineárne kombinácie odpovedajúcich vlastných funkcií $\hat{H}$, aby boli aj vlastnými funkciami $\hat{L}_z$ a aby tak mali $\hat{H}$ a $\hat{L}_z$ spoločné vlastné funkcie. Pre základný stav je toto tvrdenie jednoduchšie, lebo základná hladina pre elektrón v atóme vodíka nie je degenerovaná - ignorujúc spin elektrónu. **[2 body]**

9. (bonus príklad) *vzťah neurčitosti pre hybnosť a paritu*
Na cviku ste ukázali, že v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ae^{-x^2/x_Q^2}$, kde A a x_Q sú konštanty, platí triviálny vzťah neurčitosti $\Delta p\, \Delta P \geq 0$, lebo stredná hodnota na pravej strane dala nulu v stave Ψ. Odvoďte tu teraz vzťah neurčitosti $\Delta p\, \Delta P$, ktorý bude netriviálny, pre časticu v jednom rozmere v inom stave $\tilde{\Psi}$ s vlnovou funkciou $\tilde{\Psi}(x) = \tilde{A}\, (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{x}{x_Q})e^{-x^2/2x_Q^2}$.
Overte, že $\tilde{\Psi}(x)$ je správne normovaná pre $\tilde{A} = 1/\sqrt{\sqrt{\pi}\, x_Q}$. x_Q je kladná konštanta, typická dĺžka pre danú sústavu, ktorej hodnota nie je dôležitá pre tento náš príklad.
Mne vyšla pravá strana vzťahu neurčitosti $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{x_Q}$ a neurčitosť hybnosti $\Delta p = \frac{\hbar}{x_Q}$. Samostatne overte tieto výsledky a vypočítajte neurčitosť parity ΔP v uvedenom stave. Je tu splnený vzťah neurčitosti pre $\Delta p\, \Delta P$? **[2 body]**