

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.7

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 26.11.2024

1. Ehrenfestove vety pre JHO

(a) Napíšte obe Ehrenfestove vety pre (potenciál) jednoduchého harmonického oscilátora (JHO). Z jednej z nich vyjadrite \bar{p} a dosadte do druhej, takže dostanete jednu diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre $\bar{x}(t)$. Aké riešenie má táto rovnica? Dáva zmysel?

(b) Napíšte ešte raz obe Ehrenfestove vety pre (potenciál) JHO. Z jednej z nich vyjadrite \bar{x} a dosadte do druhej, takže dostanete jednu diferenciálnu rovnicu pre $\bar{p}(t)$. Aké riešenie má táto rovnica? Dáva zmysel? Porovnajzte rovnicu a jej riešenie s analógiou pre $\bar{x}(t)$ z časti (a).

(c) Vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO vychádzajú buď párne alebo nepárne. Vyplýva to podobne ako pre konštantnú potenciálovú jamu zo symetrie $V(x)$, resp. celého \hat{H} , a následne $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. (A teda \hat{H} a \hat{P} majú spoločné vlastné funkcie.) Čomu je potom rovná stredná hodnota polohy a stredná hodnota hybnosti oscilátora v týchto stavoch? Aký je ich časový vývoj v *stacionárnych* stavoch? Ako pre stacionárny stav zosúladiť tieto vaše odpovede a riešenia pre $\bar{x}(t)$ a $\bar{p}(t)$ v časti (a) a v časti (b)? **[2 body]**

2. po častiach konštantný potenciál

Uvažujte potenciál $V(x) = 0$ na intervale $(-a, a)$ a pre $|x| > b$, kde $0 < a < b$. Na intervale $(-b, -a)$ je $V(x) = +V_0$ a na intervale (a, b) je $V(x) = -V_0$, kde $V_0 > 0$. Bez toho, aby ste našli presné riešenie bezčasovej SchR odpovedzte na nasledujúce otázky.

(a) Určte, z akého intervalu môžu byť energie častice v tomto potenciáli.

(b) Môže mať častica v tomto potenciáli viazaný stav? Z akého intervalu je vtedy jej energia?

A môže mať rozptylový stav? Ak áno, čo sa dá vtedy povedať o jej energii?

(c) Nech sú parametre jamy také, že existuje stacionárny stav s energiou

(i): $E = V_0/2$,

(ii): $E = -V_0/2$. Načrtnite odpovedajúcu vlastnú funkciu hamiltoniánu, t.j.

vlnovú funkciu častice s touto energiou (jej reálnu časť) pre zafixovaný čas, napr. $t = 0$.

Dajte si záležať na správnej vlnovej dĺžke funkcií vo Vašom náčrtku a na správnej amplitúde, ak budú vo Vašom obrázku viaceré harmonické funkcie.

[2 body]

3. viazané stavy v konečnej konštantnej potenciálovej jame

Určte, z akého intervalu je hĺbka jamy, ktorá bude mať presne štyri viazané stavy.

Ktoré z nich budú s párnou a ktoré s nepárnou vlnovou funkciou?

Načrtnite priebeh všetkých týchto štyroch vlnových funkcií.

Z grafického riešenia čo najpresnejšie špecifikujte intervaly, v ktorých sa nachádzajú energie odpovedajúce uvažovným viazaným stavom.

Čo sa dá odpovedať na otázku, či sú tieto vlnové funkcie navzájom ortogonálne, ak by ste mali svoju odpoveď aj dokázať?

[2 body]

4. viazané stavy v konečnej konštantnej potenciálovej jame

Uvažujte limitu, keď hĺbka konečnej konštantnej jamy ide do nekonečna. Ukážte, že energetické hladiny sa vtedy v limite blížia k hladinám častice na úsečke. Teda že pre nekonečnú hĺbku jamy naozaj vychádza $E - V_0 = (\pi^2 \hbar^2)/(2mL^2) n^2$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $L = 2a$.

Keďže stred konečnej jamy mal súradnicu $x = 0$ a stred nekonečnej jamy ju mal pre $x = L/2$, treba pozorne dať dokopy hladiny párnych a nepárnych riešení konečnej jamy a poukázať na zjednodušenie výsledku v tvare $E_n = E_1 n^2$, ak odčítavame energiu od dna jamy.

[2 body]

5. presné riešenie pre konečnú konštantnú jamu

Akej hĺbky je jama s viazaným stavom s $E = -V_0/2$? Úloha má veľa riešení.

Môže to byť stav odpovedajúci jedinému viazanému stavu sústavy?

Môže to byť stav odpovedajúci nepárnemu riešeniu?

[2 body]

6. viazané stavy v konečnej jame v jednom rozmere

Uvažujme elektrón v konečnej jame šírky 10^{-10} m. Koľko viazaných stavov má tento elektrón, ak je hĺbka jamy (i) 1 eV, (ii) 10 eV?

[2 body]

7.= A2. Zbierka str.47, tlač. verzia. *JHO, kvantový vs. klasický popis*

Jednoduchý harmonický oscilátor (JHO), v Zelenej učebnici označovaný ako “Lineárny harmonický oscilátor”, je v základnom stave popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x) = A e^{-x^2/2x_Q^2}$, kde konštanta $x_Q = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ je typický rozmer tejto kvantovej sústavy a A je normovacia konštanta. Jeho energia je $\hbar\omega/2$.

Vypočítajte normováciu konštantu A . *Pomocný integrál:* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

S akou pravdepodobnosťou bude v tomto stave výchylka oscilátora z rovnovážnej polohy väčšia ako amplitúda klasického oscilátora s rovnakou energiou?

Pri numerickom odhade využite vzťah

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-t^2} dt = 0.0787.$$

(V tlačenej Zbierke je tento pomocný integrál uvedený chybné. Na internete by už mal byť správne.) **[2 body]**

8. (bonus príklad) *operátor v exponente*

Operátor $\hat{O} = e^{\hat{A}}$ definujeme cez Taylorov rozvoj exponenciály.

Ukážte, že operátor $\hat{T}_a = e^{i\hat{p}a}$ je operátorom posunutia (translácie), ktorý $\Psi(x)$ zobrazí na $\Psi(x + a)$. **[2 body]**

9. (bonus príklad) *operátor v exponente*

Určte 2x2 maticu, ktorá odpovedá operátoru

$$\hat{R}_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Neskôr sa dozvieme, že je to operátor rotácie spinu okolo osi x o uhol $\frac{\pi}{2}$. Tu je to zatiaľ iba úprava matíc a poučenie, že má zmysel uvažovať v exponente aj maticu. **[2 body]**