Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.8

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 29.11.2024

1. *globálne maximum pravdepodobnosti výskytu JHO*
Uvažujme JHO. Na prednáške sme povedali, že $|\Psi_2(x)|^2$ má globálne maximum mimo $x = 0$, a teda vyzerá opačne ako slovenský znak: stredný hrb je nižší ako krajné hrby. Dokážte toto tvrdenie.
Na ňom sme potom postavili tvrdenie, že hrby funkcie $|\Psi_N(x)|^2$, pre $N \gg 1$, sa zvyšujú smerom preč od počiatku a teda oscilátor sa v excitovaných stavoch, predovšetkým tých s $N \gg 1$ vyskytuje najpravdepodobnejšie na krajoch intervalu, v ktorom vlnová funkcia osciluje. To je interval v premennej x, kde platí E>V(x). V prípade záujmu si môžte dobrovoľne overiť, že aj pre štyri hrby funkcie $|\Psi_3(x)|^2$ odpovedajú maximu jej vonkajšie hrby. **[2 body]**

2. *JHO a vzťah neurčitosti pre stacionárne stavy*
(a) Nakoľko hamiltonián JHO komutuje s operátorom parity (vďaka symetrii potenciálu), vlnové funkcie stacionárnych stavov sú párne alebo nepárne. Čo z toho vyplýva pre stredné hodnoty $\overline{x}$ a $\overline{p}$ v týchto stavoch? Môžeme bez námahy povedať, čomu sú rovné? Odpoveď vysvetlite.

(b) Keďže potom $\overline{x^2} = (\Delta x)^2$ a $\overline{p^2} = (\Delta p)^2$, pre energiu stacionárneho stavu platí $E_n = \overline{E_n} = \frac{1}{2m}\overline{p^2} + \frac{1}{2}m\omega^2\,\overline{x^2} = \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$. Vynásobte túto rovnicu (jej prvý a posledný člen) so zlomkom $\frac{2}{\hbar\omega}$, výrazy zjednodušte a na pravej strane nahraďte $\hbar$, m a ω konštantami x_Q a p_Q.

(c) Dokážte pomocné tvrdenie, že výraz $\frac{1}{Y} + Y$ má pre kladné Y minimum pre $Y_{MIN} = 1$.

(d) Na základe pomocného tvrdenia $\frac{1}{Y} + Y \geq 2$ dokázaného v *(c)* pre ľubovolné $Y > 0$, ukážte, že musí platiť

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2}} + 2\frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2}\right) = \frac{1}{4\frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2}} + \frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2} \geq 1. \tag{1}$$

Nakoniec ukážte, že zo vzťahu neurčitosti $\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ vyplýva $\frac{(\Delta p)^2}{p_Q^2} \geq \frac{1}{4\frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2}}$, čo po dosadení do (1) dáva $\frac{(\Delta p)^2}{p_Q^2} + \frac{(\Delta x)^2}{x_Q^2} \geq 1$. Porovnajte tento výsledok s výsledkom z časti *(b)*. Je možné špecifikovať , čomu sa rovná súčin $\Delta x \, \Delta p$ pre niektorý zo stacionárnych stavov? Ak áno, určte bez počítania len na základe tohto príkladu, čomu sa vtedy rovná Δx a čomu Δp. Patrí sa napísať aj, čomu sa rovná ich súčin a okomentovať platnosť vzťahu neurčitosti.

(e) Dá sa týmto trikom určiť Δx a Δp bez počítania vo viacerých, prípadne všetkých stacionárnych stavoch? Odpoveď netipujte, ale vysvetlite. Ak áno, v ktorých? Ak nie, prečo nie? **[2 body]**

3. *kmity JHO v superpozícii stacionárnych stavov*
(a) Napíšte správne normovanú vlnovú funkciu základného stavu $\Psi_0(x)$ a prvého excitovaného stavu $\Psi_1(x)$.
Môžete ich opísať z minulosti, ale potrebujeme ich teraz aj so správnym normovaním.

(b) Graficky načrtnite, ako tieto vlnové funkcie vyzerajú a tiež hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v spomínaných dvoch stavoch.

(c) Aká je podľa obrázka stredná hodnota merania polohy oscilátora v stave Ψ_0 a aká v stave Ψ_1? Odpoveď zdôvodnite.
Tieto stredné hodnoty označme ako maticové elementy x_{00} a x_{11}.

(d) Ψ_0, Ψ_1, x_{00} a x_{11} z odpovedí na otázky *(a)* a *(c)* môžeme chápať ako $\Psi_0(x,t)$, $\Psi_1(x,t)$, $x_{00}(t)$ a $x_{11}(t)$ **v čase $\boldsymbol{t = 0}$**.
Aký je ich časový vývoj pre $\boldsymbol{t > 0}$?
Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v spomínaných dvoch stavoch v nejakom zvolenom neskoršom čase.
Dochádza v stavoch Ψ_0 a Ψ_1 ku kmitom strednej polohy oscilátora? Dá sa vaše pozorovanie zovšeobecniť na všetky stacionárne stavy?

(e) Nech je JHO v čase $t = 0$ v stave, ktorý je superpozíciou vlastných stavov Ψ_0 a Ψ_1, každý s rovnakou pravdepodobnosťou. Napíšte správne normovanú vlnovú funkciu oscilátora v čase $t = 0$. *Pre väčšiu prehľadnosť a vyniknutie pointy, ktorú sledujeme v tomto príklade, nedosadzujte konkrétne výrazy za Ψ_0 a Ψ_1 z časti (a).*
Graficky načrtnite, ako približne táto vlnová funkcia vyzerá a tiež hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v tomto stave.
Je $\overline{x}$ vychýlená mimo počiatku? Na ktorú stranu?

(f) Napíšte, ako sa vlnová funkcia JHO z časti *(e)* vyvíja v čase $t > 0$ (naďalej

nedosadzujte za Ψ_0 a Ψ_1, za energie však dosaďte príslušný násobok $\hbar\omega$), a ...

(g) ... načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v časoch $t = \pi/\omega$ a $t = 2\pi/\omega$.
Je pre tieto časy $\overline{x}$ vychýlená mimo počiatku? Na ktorú stranu?

(h) Vypočítajte strednú polohu $\overline{x(t)}$ oscilátora z časti *(f)* pomocou nenulového maticového elementu x_{01} ako funkciu času. Explicitne dokážte, že $\overline{x(t)}$ koná harmonické kmity okolo počiatku s kruhovou frekvenciou ω.
Nakoniec určte x_{01} a z neho určte amplitúdu kmitov JHO v tomto stave.

(i) Dostávame zhodu s Ehrenfestovými vetami pre JHO? Dostávame ekvivalentnú informáciu alebo sme tu odvodili aj niečo navyše, čo nemožno odvodiť z Ehrenfestových viet?

(j) Ako kmitá stredná poloha $\overline{x(t)}$ oscilátora, ktorý je namiesto superpozície základného a prvého excitovaného stavu (viď otázka *(h)*) v stave danom superpozíciou základného a n-tého excitovaného stavu, $n \geq 2$?
Svoju odpoveď zdôvodnite. Naozaj počítať tu však netreba nič. **[4 body]**

4. *JHO: amplitúda kmitov $\overline{x}(t)$*
V predchádzajúcom príklade sme uvažovali kmity $\overline{x}(t)$ v stave $\Psi(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi_0(x,\, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi_1(x,\, t)$. Tento príklad naň nadväzuje.

(a) Uvažujte teraz všeobecnú superpozíciu $\Psi(x,\, t) = c_0\,\Psi_0(x,\, t) + c_1\,\Psi_1(x,\, t)$, kde $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$. Vypočítajte $\overline{x}(t)$ a určte komplexné konštanty c_0 a c_1 tak, aby bola amplitúda kmitov $\overline{x}(t)$ maximálna.

(b) Uvažujte teraz o niečo všeobecnejšiu superpozíciu $\Psi(x,\, t) = c_0\,\Psi_0(x,\, t) + c_1\,\Psi_1(x,\, t) + c_2\,\Psi_2(x,\, t)$, kde $|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Opäť *(i)* vypočítajte $\overline{x}(t)$, *(ii)* okomentujte, či stále vychádzajú pre ňu harmonické kmity a *(iii)* určte komplexné konštanty c_0, c_1 a c_2 tak, aby bola amplitúda kmitov $\overline{x}(t)$ maximálna.
Návod k časti (iii): uvážte, či možno c_0, c_1 a c_2 prehlásiť za reálne a potom sa na hľadanie extrému amplitúdy ponúka metóda lagranžovho multiplikátora pre väzbu $c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$. **[2 body]**

5. (bonus príklad) *JHO: amplitúda kmitov $\overline{x}(t)$ - všeobecný prípad*
Zovšeobecnime $\Psi(x,\, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\Psi_n(x,\, t)$, kde $c_n = |c_n|e^{i\delta_n}$ sú komplexné čísla spĺňajúce normovaciu podmienku.

(i) Vypočítajte $\overline{x}(t)$,
(ii) okomentujte, či pre ňu vychádzajú harmonické kmity a
(iii) určte ich amplitúdu pomocou $|c_n|$ a δ_n. Otestujte, či Vám sedia výsledky príkladu **4.**

Poznámka: harmonické kmity $\overline{x}(t)$ v príklade **4.***(a) nie sú výnimočné, nakoľko by harmonické kmity vyšli aj pre superpozíciu dvoch stacionárnych stavov napr. častice na úsečke, alebo v ľubovolnej inej sústave s jedným výrazným globálnym minimom potenciálu V(x).*
Avšak v príkladoch **4.***(b) a tuná v príklade* **5.** *by už pre iné sústavy nevyšli harmonické kmity. Teda až tu sa naplno prejaví, že našou sústavou je jednoduchý harmonický oscilátor.* **[2 body]**

6. (bonus príklad) *vzťah neurčitosti pre základný stav JHO*
V príklade **2.** bol návod, ako môžte bez počítania určiť Δx a Δp pre JHO v základnom stave. Overte teraz priamym výpočtom, že ich tam dostávame správne a že je naozaj splnený vzťah neurčitosti, aj keď len-tak-tak.
[2 body]