

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. Relativita.

Tento semester sa budeme spolu učiť kvantovú mechaniku. Je dôležité mať celý čas na pamäti, že to je *nerelativistická* teória. Niekedy v letnom semestri sa ukáže potrebné pridať aj relativistické korekcie. Treba teda základné porozumenie, kedy je častica relativistická a kedy nie. Pomôže k tomu tento príklad.

(a) Načrtnite si pravouhlý trojuholník s odvesnami v horizontálnom a vertikálnom smere *rádovo* rovnakej dĺžky. Uvažujme voľnú časticu s hmotnosťou m a hybnosťou p . Nech odteraz jedna odvesna vášho trojuholníka, povedzme horizontálna, odpovedá veličine mc^2 a druhá odvesna (vertikálna) odpovedá veličine pc . Napíšte Pytagorovu vetu pre tento trojuholník. Akej fyzikálnej veličine je rovná prepona trojuholníka na základe Pytagorovej vety?

(b) Načrtnite teraz opäť pravouhlý trojuholník, s pôvodnou horizontálnou odvesnou nezmenenou mc^2 a s vertikálnou odvesnou pc scvrknutou skoro až na nulu. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je častica s takouto hybnosťou nerelativistická alebo ultrarelativistická?

Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu? Inými slovami, čomu sa približne rovná energia takejto častice v porovnaní s mc^2 a pc ?

Keďže hybnosť častice je stále nenulová, hoci maličká voči mc^2 , ako závisí energia ($E - mc^2$) od hybnosti v uvažovanom prípade $pc \ll mc^2$? Táto závislosť sa nedá vyčítať z obrázka. Je to o niečo ťažšia otázka ako tie predchádzajúce, zvlášť, ak by ste mali odpoveď odvodiť. Viete ju odvodiť?

Ako bežne voláme veličinu ($E - mc^2$)?

(c) Opačná limita ako v (b): v trojuholníku teraz zväčšíte pôvodnú vertikálnu odvesnu $pc \gg mc^2$, ponechajúc horizontálnu odvesnu mc^2 pôvodnej dĺžky. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je takáto častica nerelativistická alebo ultrarelativistická?

Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu?

Ako je ešte významné, či je častica hmotná alebo nehmotná? Ak má hmotná častica tak veľkú energiu, že jej hmotnosť sa stala bezvýznamnou a možno ju zanedbať, časticu voláme ultrarelativistickou. Jej kinematika (opis pohybu) sa stáva rovnaká ako kinematika fotónu, častice svetla s nulovou hmotnosťou. Napríklad rýchlosť ultrarelativistickej častice je už prakticky rovná c .

2. Relativita - pokračovanie

(a) Koľko je mc^2 pre elektrón?

Koľko je mc^2 pre protón?

Koľko je mc^2 pre α časticu? Čo je α častica?

Stačia tu odpovede s presnosťou do 10%.

(b) Je alebo nie je relativistická α častica z Rutherfordovho experimentu, pri ktorom Rutherford objavil/odvodil, že v atóme je tvrdé jadro? V odpovedi zvážte, že Rutherford mal ako zdroj α častíc len nejakú prirodzenú rádioaktívnu horninu, napr. možno smolinec z Jáchymova.

(c) Je alebo nie je elektrón viazaný v atóme vodíka relativistický?

(d) LHC urýchľuje protóny na maximálnu energiu 6.8 TeV. "T" je skratka pre "tera" a rovná sa tisíc Giga, resp. $\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}$. Sú tieto protóny nerelativistické, relativistické alebo ultrarelativistické?

Svoje odpovede zdôvodnite.

Dôležitá poznámka: V minulosti ste sa naučili, že či je častica relativistická, určíme porovnaním jej rýchlosti s rýchlosťou svetla. To je správne, ale v kvantovom svete máme problém hovoriť o rýchlosti častice, keďže princíp neurčitosti nedovoľuje merať presne polohu a hybnosť. V kvantovom svete sa veľmi zídne to, čo sme sa práve naučili: určovať, či je častica relativistická z jej energie, prípadne z jej hybnosti porovnaním s mc^2 .

3. Relativita - pokračovanie

(a) Elektrón urýchlime z pokoja potenciálovým rozdielom

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) 1 MV = 1000 kV.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je elektrón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(b) Aká je v každom z týchto prípadov jeho kinetická energia po urýchlení zadaným potenciálom?

(c) Aká je v každom z týchto prípadov jeho celková energia?

Vráťte sa k prvému príkladu s pravouhlými trojuholníkmi a rozhodnite, ktorý z načrtnutých trojuholníkov odpovedá elektrónu po prechode cez jednotlivé potenciálové rozdiely.

4. Relativita - pokračovanie

(a) Stojaci nehybný protón urýchlime rovnakým potenciálovým rozdielom ako predtým elektrón:

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) $1 \text{ MV} = 1000 \text{ kV}$.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je protón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(b) Od zhruba akého potenciálového rozdielu bude potrebné považovať urýchlený protón za relativistickú časticu? Asi aký dlhý tunel na to treba, ak sa protón pohybuje po priamke a prierazné napätie vzduchu či vo vákuu je cca 1 MV/m ?

Poznamenajme, že urýchľujúce elektrické pole generované ako maximum pulznej elmag vlny dosahuje dnes hodnoty 60 MV/m . Sofistikované lineárne urýchľovače teda nie sú limitované vyššie uvedenou hodnotou statického prierazného napätia a sú / mohli by byť kratšie, ako by sme si mohli naivne myslieť.

5. fundamentálne konštanty

K fundamentálnym rozmerným konštantám nášho sveta patria $\hbar = 1.054571800 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$, $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ a $k = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. Ich hodnoty špecifikujú náš svet spomedzi iných možných svetov.

(a) Overte za pomoci kalkulačky (výnimočne), že s veľkou presnosťou platí rovnosť $\hbar c = 2000 \text{ eV} \cdot 10^{-10} \text{ m}$, kde 10^{-10} m je jeden angstrom. Akej nepresnosti sa dopúšťame používaním tejto hodnoty?

(b) Podobne napíšte vzťah pre konštantu jemnej štruktúry α pomocou základných konštant a vypočítajte jej presnú hodnotu.

Akej nepresnosti sa dopúšťame použitím zaokrúhlenej hodnoty $1/(\text{cele číslo})$?

6. typický rozmer atómu

(a) Použite hodnotu $\hbar c$ a hodnotu α pri výpočte veličiny $\hbar/(m_e c \alpha)$, ktorá vychádza ako rádový odhad pre typický rozmer atómu r_{ATOM} .

Urobte to **bez kalkulačky**. Začnite násobením čitateľa aj menovateľa konštantou c .

(b) Keďže je táto veličina významná, má aj osobitné meno. Viete si spomenúť, ako sa volá?

(c) Overte, že veličina $\hbar/(m_e c \alpha)$ naozaj vychádza v SI sústave v jednotkách dĺžky, teda v metroch.

7. typická väzbová energia atómu

Tento príklad nadväzuje na predchádzajúci:

(a) Spomeňte si alebo opíšte vzťah z prednášky, čomu vychádza rovná typická energia atómu E_{ATOM} . Vypočítajte v jednotkách eV, čomu sa rovná vychádzajúc z hodnoty $m_e c^2$. Na delenie so 137^2 sa teraz zide kalkulačka.

(b) Okomentujte, či je v poriadku, že E_{ATOM} vychádza záporná.

(c) Zhodou okolností toto je presne aj energia základného stavu elektrónu v atóme vodíka. Aká je energia prvého excitovaného stavu elektrónu? Aká je excitačná energia potrebná na preskok elektrónu medzi týmito hladinami? *Túto hodnotu sme v rýchlosti uviedli na prednáške pri opise Franckovho-Hertzovho experimentu z roku 1914.*

8. typická vzdialenosť v našom svete z rozmerovej analýzy

Na začiatku príkladu 5. sme uviedli numerické hodnoty v SI sústave troch fundamentálnych konštánt nášho sveta. Určte na základe rozmerovej analýzy, aký z nich vychádza typický rozmer (vzdialenosť) v našom svete a aká vychádza typická energia nášho sveta.

Dostávate zhodu s r_{ATOM} a E_{ATOM} ?

Ak nie, čo je zdrojom veľkého rozdielu?

To, čo ste tu vypočítali sú Planckova vzdialenosť a Planckova energia.

9. rozmerová analýza ešte raz

Výsledky pre E_{ATOM} a r_{ATOM} nie sú v rozpore s výsledkami z rozmerovej analýzy pomocou konštánt \hbar , c a m_e . Dokážte toto tvrdenie tým, že túto analýzu tu odvodíte: vychádzajúc zo vzťahov $E_{ATOM} = \hbar^x c^y m_e^z$ a podobne pre r_{ATOM} **vypočítate** (a nie uhádnete) mocniny x , y a z .

Všimnite si, že z rozmerovej analýzy však nie je možné odvodiť, akým spôsobom vystupuje vo výsledkoch bezrozmerná konštanta α , ktorá úzko súvisí s coulombovským priťahovaním elektrónu k jadrú. Keďže α nie je rádovo 1 (a vynechanie coulombovskej interakcie pri odhade E_{ATOM} a r_{ATOM} je divné), rozmerová analýza vychádzajúca iba z konštánt \hbar , c a m_e nedáva spoľahlivé rádové odhady pre energiu a rozmer atómu. Iným dôvodom, prečo ich nedáva, je, že sme do rozmerovej analýzy zapojili konštantu c , čo nie je v súlade so zdravým sedliackym rozumom pre nerelativistickú teóriu. Rozmerová analýza dá spoľahlivé odhady, ak sa namiesto c uvažuje iná konštanta, napr. $e^2/(4\pi\epsilon_0)$. V prípade dostatku času ju zopakujte s touto zámenou.