Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. *základné pojmy*
Pripomeňte si základné pojmy: základný stav, excitované stavy (prvý, druhý, n-tý), ionizovaný stav, viazaný stav - a každý z týchto pojmov prediskutujte pre atóm vodíka (*čiže pre elektrón v atóme vodíka*) a tiež pre časticu na úsečke.
Venujte pozornosť rozostupom hladín: ako veľmi sa líšia tieto rozostupy pre atóm vodíka v porovnaní s časticou na úsečke.

2. *základné pojmy - pokračovanie*
Môže mať elektrón energiu $E > 0$ v Coulombovskom poli od bodového nekonečne ťažkého protónu?
Môže izolovaná sústava dvoch elektrónov vytvoriť viazaný stav?
Môže izolovaná sústava dvoch protónov vytvoriť viazaný stav?
Môže izolovaná sústava, ktorá pozostáva z dvoch protónov a dvoch neutrónov vytvoriť viazaný stav?
Čo by ste povedali na otázku, prečo nie je v prírode atómové jadro s piatimi nukleónmi?

3. *častica na úsečke*
(a) Aká je predpoveď pre výsledok merania energie častice na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2(x)$?

(b) Aká je predpoveď pre strednú hodnotu týchto meraní?

(c) Aká je predpoveď pre strednú kvadratickú odchýlku týchto meraní?
Je Váš výsledok pre ΔE v súlade s očakávaním zdravého rozumu?

4. *častica na úsečke - časový vývoj*
(a) Aký je časový vývoj vlnovej funkcie $\Psi_n(x, t > 0)$, ktorá je v čase $t = 0$ rovná $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sin\frac{n\pi x}{L}$?
Načrtnite graf $|\Psi_n(x, t > 0)|^2$ v ľubovolnom čase $t > 0$.

(b) Aký je časový vývoj vlnovej funkcie $\Psi_+(x, t > 0)$? *Teda napíšte, čomu sa rovná táto funkcia.*
Načrtnite graf $|\Psi_+(x, t > 0)|^2$ v čase $t_1 = \pi\hbar/(3E_1)$ a v čase $t_2 = 2t_1$. Svojimi odpoveďami by ste mali dokumentovať cestovanie hrbu hore-dole po úsečke.

5. *častica na úsečke - ortogonalita funkcií* $\{\Psi_n(x)\}$
Ukážte, že platí $\int_0^L \Psi_m^*(x)\, \Psi_n(x)\, dx = \delta_{mn}$, pre m, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. *častica na úsečke - normovanie superpozície*

(a) Uvažujme časticu na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \, \Psi_n(x)$, kde c_n sú komplexné čísla. Akú podmienku musia spĺňať tieto koeficienty, aby bola $\Psi(x)$ správne normovaná?
Pri odvodení odpovede by mala byť užitočná ortogonalita dokázaná v predchádzajúcom príklade.

(b) Na základe čoho nás odvodená podmienka motivuje k tvrdeniu, že $|c_n|^2$ je pravdepodobnosť , s akou pri meraní energie častice v stave $\Psi(x)$ nameriame energiu E_n ?

7. *častica viazaná vo štvorci o strane L*
Uvažujme časticu (v dvoch rozmeroch) viazanú na štvorec o strane L. Jej stav s energiou $E_{m,n} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}(m^2+n^2)$ je popísaný vlnovou funkciou $\Psi_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi y}{L}$.

(a) Aká je energia 1., 2. a 3. excitovaného stavu ako násobok $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$?

(b) Aká je degenerácia týchto stavov?

8. *častica viazaná v kocke s hranou L*
Zovšeobecnite tvrdenia predchádzajúceho príkladu na trojrozmerný prípad a odpovedzte na tie isté otázky pre časticu v troch rozmeroch viazanú v kocke o hrane L.