Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

0. *(a)* Ako by ste čo najpresnejšie odpovedali na otázku, akým otvorom prešiel elektrón v dvojštrbinovom experimente?

(b) Ako by ste čo najpresnejšie odpovedali na otázku, kde je častica na úsečke, ak je známe, že táto častica je v základnom stave?

(c) Ako by ste čo najpresnejšie odpovedali na otázku, kde je častica na úsečke, ak je známe, že táto častica je v prvom excitovanom stave?

(d) Ako by ste čo najpresnejšie odpovedali na otázku, kde je elektrón v atóme vodíka, ak je známe, že elektrón je v základnom stave?

1. V nasledujúcich príkladoch uvažujeme časticu na úsečke dĺžky L. Pripomeňme, že v čase $t = 0$ sú vlnové funkcie jej stavov s energiou $E_n = E_1\, n^2$ rovné $\Psi_n(x) = \sqrt{2/L}\, \sin(n\pi x/L)$.

(a) Uvažujme časticu v základnom stave a prístroj, ktorým meriame jej polohu. Zamyslite sa nad pravdepodobnosťami, s akými nameriame, že častica sa nachádza v prvej polovici úsečky, resp. v druhej polovici úsečky. Ktorá je väčšia?
Zoraďte podľa veľkosti pravdepodobnosti, s akými nameriame, že častica sa nachádza *(i)* v prvej štvrtine úsečky, *(ii)* v druhej štvrtine úsečky, *(iii)* v tretej štvrtine úsečky?
Poznámka: Netreba tu nič počítať. Iba v prípade, že máte naozaj dostatok času vypočítajte výsledok $\frac{1}{4} - X$ pre prípad *(i)* a ukážte, že $X = \frac{1}{2\pi}$.

(b) Ako sa zmenia tieto predpovede, ak je častica v prvom excitovanom stave? Čomu je vtedy rovné X ?

2. Uvažujme časticu na úsečke dĺžky L v časovom okamihu $t = 0$. Častica je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\, \Psi_2(x) + \frac{2}{\sqrt{5}}\, \Psi_3(x)$.
(a) Akú predpoveď vieme dať o výsledku jedného merania energie častice?
(b) Akú predpoveď vieme dať o výsledku druhého merania energie na tej istej častici?
(c) Akú predpoveď vieme dať o výsledku mnohých meraní energie nasledujúcich po sebe na tej istej častici?
(d) Uvažujme veľa identických sústav, každá s časticou na úsečke pripravenou v stave $\Psi(x)$ zo zadania vyššie. Akú predpoveď vieme dať o výsledku meraní energie na týchto sústavách, pričom na každej sústave meriame energiu častice iba jeden raz?
(e) Určte strednú hodnotu meraní z časti *(d)*.
(f) Ak ste túto strednú hodnotu meraní z časti *(d)* vypočítali dosadzovaním do vzorca $\overline{E} = \sum_{n=2,3} E_n P(E_n)$, tak sa teraz zamyslite, ako dostať výsledok bez počítania.

(g) Určte bez počítania strednú kvadratickú odchýlku meraní energie z časti *(d)*.

3. Uvažujme dva experimenty s elektrónom na úsečke. V čase $t = 0$ je elektrón v prvom experimente v stave Ψ_+ a v druhom experimente je v stave Ψ_-. Tieto nech sú dané vlnovými funkciami $\Psi_-(x) = A_-\left(\Psi_1(x) - \Psi_2(x)\right)$ a $\Psi_+(x) = A_+\left(\Psi_1(x) + \Psi_2(x)\right)$.

(a) Určte normovacie konštanty $A_\pm$ využijúc $\int_0^L \Psi_n^* \Psi_m dx = \delta_{mn}$.

(b) Načrtnite vlnové funkcie $\Psi_-(x)$ a $\Psi_+(x)$ a im odpovedajúce hustoty pravdepodobnosti výskytu elektrónu. Sú tieto stavy rozlíšiteľné? Ak áno, ako (akým meraním)?

(c) Sú stavy Ψ_- a $\tilde{\Psi}_+$ rozlíšiteľné, ak máme k dispozícii iba prístroj na meranie energie?

4. Navrhnite vlnovú funkciu častice na úsečke, ktorá bude popisovať časticu, ktorej možno namerať iba štyri rôzne hodnoty energie E_1, E_2, E_3 a E_4 a to s pravdepodobnosťami, ktoré budú v pomere 4:3:2:1.

5.= **A10.** Zbierka, str.17 tlačená verzia a str.15 pdf. *Častica na úsečke.* Aproximujte π elektróny v molekule hexatriénu šiestimi neinteragujúcimi elektrónmi viazanými na úsečku dĺžky L a určte rozdiel medzi energiou základného a prvého excitovaného stavu takejto sústavy. *($L = N \times \Delta\ell$, kde $N = 6$ je počet elektrónov a $\Delta\ell = 0.289/2 = 0.1445\,nm$ je stredná vzdialenosť medzi atómami uhlíka. Zarátané tu je vyčnievanie elektrónového oblaku z uhlíkového reťazca o dĺžku $\Delta\ell/2$ na každú stranu.)*

V akej časti el-mag spektra sú fotóny z takýchto prechodov? *Porovnajte s experimentálnym údajom uvedeným v texte v Zbierke.*
Je hexatrién vhodný ako farbivo? (T.j. odpovedá prechod pohlcovaniu elmag žiarenia z viditeľného spektra?)
Aká podobná lineárna molekula: dlhšia (viac atómov C) či kratšia (menej atómov C), by mohla byť vhodná ako farbivo vďaka študovanému prechodu?

6. Uvažujme časticu na úsečke $< 0, L >$ v stave popísanom vlnovou funciou $\Psi(x) = Ax^2(L-x)^2$. Načrtnite vlnovú funkciu častice.

Ako prvé vypočítajte najskôr A. Odporúčame pritom položiť $L = 1$ a využiť $\int_0^1 = t^M(1-t)^N dt = \frac{M!\,N!}{(M+N+1)!}$. Do výsledku dodajte správnu mocninu L.

Určte, ako by sa počítala pravdepodobnosť $P(E_1)$ namerať v tomto stave častici energiu základného stavu E_1. Vyhodnoťte $P(E_1)$ číselne iba v prípade veľkého dostatku času.

Čo sa dá bez počítania povedať o $P(E_2)$?

Čo sa dá bez počítania povedať o všetkých ostatných $P(E_n)$, $n > 2$?

Vychádzajúc z náčrtku $\Psi(x)$ okomentujte, prečo pre $P(E_1)$ vychádza najväčšia. Bez počítania, len na základe výsledku $P(E_1)$ odhadnite $P(E_3)$. *Myslíme naozaj* $P(E_3)$ *a nie* $P(E_2)$.

7. = **A11** v Zbierke, str.16 (tlačená verzia) a str.19 (pdf).
Elektrón je viazaný na úsečke a nachádza sa v základnom stave. Vyjadrite silu, ktorou pôsobí na krajné body úsečky. Má úsečka s elektrónom tendenciu sa rozopnúť alebo sa stiahnuť?

Návod: Ako závisí energia na dĺžke úsečky L*?*
Ak sa dĺžka zväčší na $L + dL$*, ako sa zmení energia do prvého rádu v* dL*?*
Kto koná prácu pri roztiahnutí úsečky z L *na* $L + dL$ *: elektrón na vonkajší svet, alebo vonkajší svet na elektrón? Ako pomocou sily vyjadriť túto prácu?*

8. Porovnajte silu F_1 z výsledku príkladu **7.** s Coulombovou silou F_2 na elektrón vo vzdialenosti L od kladne nabitého jadra v atóme vodíka.

Zamyslite sa nad tým, či je dôvod očakávať, že niektorá z týchto dvoch síl je zjavne väčšia než druhá.

Numericky vypočítajte pomer F_2/F_1 pre $L = a_1 = 0.5 \times 10^{-10}$m *(Bohrov polomer)*. Pri výpočte nechceme používať kalkulačku, ak netreba. Preto doplňte výraz s $e^2/4\pi\epsilon_0$ na bezrozmernú hodnotu $\alpha = 1/137$, a využite známu hodnotu súčinu $\hbar c$ a $m_e c^2$.