Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. *voľná častica, základné veci na pripomenutie a lepšie zapamätanie*
(a) Voľná častica je po častici na úsečke druhý jednoduchý kvantový systém, na ktorom sa chceme poučiť o vlastnostiach vlnových funkcií. Uvažujme voľnú časticu v jednom rozmere s hybnosťou p, resp. s $k = p/\hbar$. Napíšte (*skúste spamäti*) vlnovú funkciu tejto voľnej častice správne normovanú na delta funkciu ako funkciu x a t.

(b) Kde je táto častica *lokalizovaná* v priestore?
Čo by ste odpovedali na otázku, či je to ešte stále *častica*?
Čo vychádza pre strednú hodnotu jej polohy $\overline{x}$, kvadrátu jej polohy $\overline{x^2}$ a strednú kvadratickú odchýlku polohy Δx?
Je pre takúto voľnú časticu splnený princíp neurčitosti?

(c) Menej dôležitá poznámka k normovaniu: Ak sa rozhodneme pre normovanie na delta funkciu, vlnovú funkciu môžeme normovať buď podmienkou $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k^*(x)\Psi_{k'}(x)\,dx = \delta(k-k')$ alebo podmienkou $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_p^*(x)\Psi_{p'}(x)\,dx = \delta(p-p')$. Tieto dve alternatívy nie sú totožné. Určte normovaciu konštantu v každom z týchto prípadov. *Treba k tomu integrálne vyjadrenie delta funkcie.*

2. *voľná častica - ďalšie základné veci*
(a) V predchádzajúcej odpovedi ste si pripomenuli vlnovú funkciu voľnej častice s hybnosťou p. Ako závisí na čase hustota pravdepodobnosti výskytu takejto častice?
Možno povedať, že sa častica premiestňuje? Pohybuje sa niekam jej pravdepodobnostný oblak,... a je tu vôbec nejaký oblak?

(b) Pripomeňte si, čomu sa má podľa prednášky (je to požičané z budúcnosti) rovnať parameter E v exponente $\Psi_p(x,t)$.
Ako by ste odpovedali na otázku, čo je to "m"vo výraze pre E?
Ak má byť m hmotnosť častice vypĺňajúcej rovnomerne celý priestor, ako to, že m je konečná? Nemala by byť nekonečno?

(c) Je treba rozumieť, že $\Psi_p(x,t)$ s exponentom $i(px-Et)/\hbar$ je rovinná vlna pohybujúca sa v kladnom smere osi x. Čiže s fázou, ktorá sa pohybuje v smere $x+$. Viete to dokázať?
Neskôr ukážeme, že táto vlnová funkcia odpovedá kvantovému stavu s hybnosťou p, ktorá ako vektor $\vec{p}$ má smer $x+$.
Ako napísať vlnovú funkciu popisujúcu kvantový stav s hybnosťou p v opačnom smere?

(d) Ktorá z vĺn $\Psi_A(x,y,z,t) = e^{i(pr-Et)/\hbar}$ a $\Psi_B(x,y,z,t) = e^{i(pr+Et)/\hbar}$ odpovedá rozbiehavej a ktorá zbiehavej sférickej vlne? Odpoveď vysvetlite.
Popisujú tieto vlnové funkcie - ignorujúc normovanie - kvantový stav častice s hybnosťou p? Ak áno, aký vektor $\vec{p}$ to je? Ak nie, prečo nie?

3. *voľná častica s hybnosťou $\vec{p}$ v troch rozmeroch*
(a) Teraz uvažujme voľnú časticu s hybnosťou $\vec{p}$ opísanú vlnovou funkciou $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t)$ v *troch* rozmeroch. Vlnovú funkciu sme uviedli na prednáške. Pripomeňte si ju aj so správnym normovaním (na delta funkciu).
Aj tu by mal vystupovať parameter E. Čomu je rovný v trojrozmernom prípade?

(b) Aký geometrický útvar tvoria vlnoplochy $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t)$?
Ako sa (na základe tvaru vlnoplochy) volá takáto vlna?

(c) Ako vyzerá normovacia podmienka (na "delta funkciu") pre $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t)$?

(d) Čo sa na $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t)$ zmení, ak ju normujeme na konečný objem L^3 namiesto na delta funkciu?
Navrhnite periodické okrajové podmienky v analógii s jednorozmerným prípadom, ktorý bol na prednáške.

(e) Čo je de Broglieho vlnová dĺžka voľnej častice popísanej vlnovou funkciou $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t)$?

4. *voľná častica v troch rozmeroch*
(a) Čo by ste povedali na otázku, akú hybnosť nameriame častici popísanej vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{\vec{p}_1}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_{\vec{p}_2}(\vec{r}, t)$?
Návod: spomeňte si na výsledok merania energie pre časticu na úsečke, kde častica bola v superpozícii stavov s rôznymi energiami.

(b) Čomu je rovné Δp_x , Δp_y a Δp_z pre neurčitosti merania zložiek hybnosti častice z *(a)*.

(c) Navrhnite vlnovú funkciu stavu voľnej častice, ktorej pri meraní hybnosti nameriame hybnosti $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$ s pravdepodobnosťami $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$.

5. *matematická vsuvka: delta funkcia*
Určte, čomu sú rovné integrály s delta funkciou v podintegrálnej funkcii:
(a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x+1)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(2x+1)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2-4)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2+4)\,dx,$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,\delta(x+1)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,\delta(2x+1)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,\delta(x^2-4)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,\delta(x^2+4)\,dx,$$

(c)

$$\int_{-4}^{+4} (x+3)\,(x+5)\,\delta(x-1)\,dx, \quad \int_{10}^{100} (x+3)\,(x+5)\,\delta(x-1)\,dx, \quad \int_{-4}^{+4} (x+3)\,(x+5)\,\delta[(x+3)(x+5)]\,dx, \quad \int_{-4}^{+4} (x+4)\,(x+5)\,\delta[(x+3)(x+5)]\,dx,$$

(d)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x^2)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^2)\,dx,$$

(e)

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1}^{1} dy\, y\,\delta(x-y)\,, \quad \int_{-2}^{0} dx \int_{-1}^{1} dy\, y\,\delta(x-y)\,.$$

6. Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný (obrovský) interval dĺžky L a periodickými okrajovými podmienkami je vo všeobecnosti v čase $t=0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$. Hybnosť je diskrétna (nie spojitá), aby spĺňala periodické okrajové podmienky: $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L} n,\ n \in Z$. V tomto príklade uvažujme, že tento balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\frac{2}{2+i}\, e^{i\,qx/\hbar} + c\, e^{-i\,qx/\hbar} \right),$$

kde hybnosť $q > 0$ je nejakým veľkým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$ *(ide tu opäť len o splnenie periodických okr. podmienok, zároveň to zaručuje ortogonálnosť rovinných vĺn, z ktorých sa skladá naša superpozícia).*

(a) Určte všetky možné hodnoty c pre správne normovanú $\Psi(x)$.
(b) Aká je pravdepodobnosť, že pri meraní hybnosti v stave Ψ nameriame hybnosť q, hybnosť $-q$, hybnosť $2q$, hybnosť s absolútnou hodnotou rovnou q?
(c) Aká je stredná hodnota hybnosti častice v stave Ψ?
(d) Aká je neurčitosť hybnosti Δp častice v stave Ψ?
(e) Čo by ste odpovedali na otázku, aká je hybnosť častice v stave Ψ?
(f) Aké energie možno namerať v stave Ψ a s akou pravdepodobnosťou?
Čo by ste odpovedali na otázku, aká je energia častice v stave Ψ?
(g) Častici v stave Ψ sme namerali hybnosť q.
Na tejto istej častici budeme potom merať hybnosť aj druhýkrát.
S akou pravdepodobnosťou akú hybnosť nameriame?
(h) Nech $\Psi(x) = \Psi(x, t=0)$. Napíšte $\Psi(x,t)$ pre $t > 0$.
Zmenia sa v neskoršom čase odpovede na niektoré z otázok *(b)-(g)*?
(i) Závisí niektorá z odpovedí na veľkosti intervalu L? Prečo nie?

7. *voľná častica, vlnový balík*
(a) Na prednáške sme predviedli päť príkladov vlnového balíka. *Z toho prvý, $c_1(k) = \delta(k-k_0)$ a posledný, $c_5(k) = konst.$ sú triviálne.* Pripomeňte si

týchto päť príkladov a pod sebou urobte päť náčrtkov $c_1(k)$, $c_2(k)$, ... až $c_5(k)$ definujúcich balíky študované na prednáške. Vedľa týchto náčrtkov potom načrtnite grafy im odpovedajúcich vlnových funkcií (ich reálnych častí).

(b) Načrtnite priebeh funkcie

$$c_6(k) = konst.\, \frac{1}{1 + \frac{(k-k_0)^2}{(\Delta k)^2}}.$$

Ak $c_6(k)$ definuje vlnový balík, ako bude vyzerať $\Psi(x)$ opisujúca stav častice? Opäť načrtnite jej reálnu časť.

(c) Aký integrál treba spočítať pri presnom určení vlnovej funkcie tohto šiesteho balíka? *Integrál stačí napísať. Ak to viete a máte dostatok času, vypočítajte ho. Napr. prechodom do komplexnej roviny v premennej k.*

(d) Pre $\Delta k > 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{(\Delta k)^2}}\, e^{ikx}\, dk = \pi \Delta k e^{-\Delta k\, |x|}$$

Na základe znalosti tohto integrálu zopakujte náčrtok z časti *(b)*.

(e) Prečo je $c_6(k)$ menej vhodná na opis častice ako $c_4(k)$?
Pripomeňme, že $c_4(k)$ opisovala gaussovský balík.

8. *voľná častica, vlnový balík*
(a) Študovali sme teda už šesť príkladov vlnových balíkov v čase $t = 0$.
Ktoré z nich odpovedajú stacionárnym stavom?

(b) Ako sa líšia náčrtky imaginárnej časti $\Psi(x)$, ktoré sme nekreslili, od známych náčrtkov reálnej časti $\Psi(x)$?

(c) Aká je v jednotlivých prípadoch stredná hodnota polohy častice?

(d) Nie je to podozrivé, že po každé je odpoveďou nula?
Ako doplniť / zmeniť šesť známych funkcií $c_i(k)$, aby vyšla stredná hodnota polohy častice rovná všeobecnej hodnote x_0 namiesto nuly?