

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. (a) Zjednodušte komutátor $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ na výraz, v ktorom budú už len jednoduché komutátory.

(b) Použite výsledok z časti (a) na výpočet komutátora $[\hat{x}^2, \hat{p}]$ pomocou známeho výsledku pre komutátor $[\hat{x}, \hat{p}]$.

2. Nadväzujúc na príklad 1.(b) určte $[\hat{x}^3, \hat{p}]$, prípadne aj pre vyššie mocniny operátora \hat{x} , aby ste mohli uhádnuť, čomu sa rovná $[\hat{x}^N, \hat{p}]$ pre ľubovoľné prirodzené číslo N . Svoj tip potom dokážte matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou obsahuje dva kroky. Prvým je overenie, že hypotéza (tip) platí pre $N = 1$ a druhým, zvyčajne ťažším krokom je overenie, že ak hypotéza platí pre N , tak z toho vyplýva, že platí aj pre $N + 1$.

Nakoniec overte výsledok pre $[\hat{x}^N, \hat{p}]$ priamym výpočtom.

3. (a) Na prednáške sme uviedli, že komutujúce operátory môžu mať spoločné vlastné funkcie. Uvažovali sme voľnú časticu a poukázali na to, že operátor hybnosti tu komutuje s hamiltoniánom. Avšak hamiltonián má 2x degenerované vlastné hodnoty, a preto nie každá jeho vlastná funkcia je aj vlastnou funkciou \hat{p} . Napíšte (v jednom rozmere), ktoré funkcie sú spoločné vlastné funkcie \hat{H} aj \hat{p} . Sú tieto funkcie zároveň vlastnými funkciami operátora parity \hat{P} ?

(b) Ukážte, že operátor parity komutuje s hamiltoniánom a napíšte, ktoré funkcie sú zároveň vlastnými funkciami \hat{H} aj \hat{P} . Sú tieto funkcie zároveň vlastnými funkciami operátora hybnosti \hat{p} ?

(c) Vypočítajte komutátor $[\hat{p}, \hat{P}]$, resp. ukážte, že je rovný $-2\hat{P}\hat{p}$. Budú mať tieto operátory spoločné vlastné funkcie? Prečo nie? Je to zrejmé na príklade voľnej častice a vyššie uvedených vlastných funkciách \hat{H} ?

4. Na základe predchádzajúceho príkladu napíšte vzťah neurčitosti pre súčin $\Delta p \Delta P$ v ľubovoľnom stave Ψ .

Vyskúšajte, či je splnený pre $\Psi(x) = Ae^{-x^2}$. Pomôcka: začnite pravou stranou vzťahu neurčitosti.

5. Dokážte, že vo sférických súradniciach platí $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

6. Uvažujme elektrón v atóme vodíka. Napíšte \hat{H} a \hat{L}_z vo sférických súradniciach a overte, že komutujú. Čo z toho vyplýva pre ich vlastné funkcie?

Overte na vlnovej funkcii základného stavu, že je zároveň vlastnou funkciou \hat{L}_z .