

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.3

riešenia, prosím, odovzdajte do 22.04.2025

1. voľná častica vo sférických súradniciach

(a) Overte, že $\Psi(\vec{r}) = j_0(rq)Y_{00}(\theta, \varphi)$, je riešením SchR pre voľnú časticu, kde $j_0(x) = \sin x/x$ je sférická Besselova funkcia nultého stupňa.

Čomu je zo SchR rovná energia častice?

(b) Overte, že vyššie zadanú $j_0(x)$ naozaj obdržíme zo vzťahu uvedeného na prednáške: $j_\ell(x) = \frac{x^\ell}{2^{\ell+1}\ell!} \int_{-1}^{+1} e^{ixs} (1-s^2)^\ell ds$.

(c) Načrtnite priebeh funkcie $j_0(x)$.

Pripomeňme, že $x = qr$, kde parameter q je fixovaný energiou rozptyľovanej častice. Keďže funkcia má zjavne nulové body, znamená to, že rovinná vlna $\Psi(\vec{r}) = e^{iqz}$ má takú čudesnú štruktúru v priestore, že je nulová pre tie polomery, ktoré odpovedajú nulovým bodom funkcie $j_0(x)$? Odpoveď vysvetlite.

[2 body]

2. voľná častica vo sférických súradniciach

(a) Nadväzuje na predchádzajúcu otázku. Určte $j_1(x)$ a overte, že $\Psi(\vec{r}) = j_1(rq)Y_{10}(\theta, \varphi)$ je riešením SchR pre voľnú časticu.

(b) Načrtnite priebeh funkcie $j_1(x)$ a okomentujte, v čom sa pre malé x líši od $j_0(x)$.

[2 body]

3. rozbiehavé a zbiehavé guľové vlny ako príspevky do vlnovej funkcie voľnej častice

(a) Pre identifikovanie rozbiehavých a zbiehavých vln v riešení pre voľnú časticu sme bez dôkazu použili, že v limite pre veľmi veľké r platí $j_\ell(qr) = \frac{\sin(qr - \ell\pi/2)}{qr} + \text{členy } \frac{1}{r^2}$.

Ukážte, že toto asymptotické priblíženie naozaj platí pre $\ell = 0$ a $\ell = 1$.

(b) Prečo sme tu doteraz v otázkach neuvažovali $n_\ell(qr)$, druhé nezávislé riešenie SchR?

[2 body]

4. Greenova metóda pre určenie amplitúdy rozptylu $f(\theta, \varphi)$

V riešení pre Greenovu funkciu uvažujte polohu oboch pólov mimo reálnej

osi *opačnú* ako na prednáške. Ukážte, že dostávate Greenovu funkciu pre zbiehavé riešenie, na rozdiel od rozbiehavého riešenia z prednášky. **[2 body]**

5. rozptyl na Coulombovom potenciáli od bodového jadra

Určte, v akom pomere budú počty častíc registrovaných detektorom umiestneným pod uhlom $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = 3\pi/4$ a $\theta_4 = \pi$. **[2 body]**

6. rozptyl na Coulombovom potenciáli od jadra s polomerom $a > 0$

Uvažujme rozptyl alfa častice na jadre zlata guľového tvaru s polomerom 6 fm. Presnejšie: uvažujeme, že protóny v jadre zlata sú rovnomerne rozmiestnené v guli s uvedeným polomerom s konštantnou hustotou elektrického náboja.

(a) Nastavme energiu rozptylovanej častice tak, že platí $q = \frac{\pi}{2} \frac{1}{a}$. Aká je to energia v MeV? Je to rozumná hodnota pre alfa časticu pochádzajúcu zo štiepenia ťažkých jadier (medzi olovom a uránom)? Odpoveď stručne vysvetlite.

(b) Ako blízko k jadru (vo fermi) prenikne uvedená alfa častica pri čelnej zrážke?

(c) Určte, ako bude v experimente (teda v termínoch dif. účinného prierezu) potlačený spätný rozptyl v porovnaní s výsledkom očakávaným pre bodové jadro.

(d) Určte, ako bude v experimente potlačený rozptyl pod uhlom $\theta = 60^\circ$ v porovnaní s výsledkom očakávaným pre bodové jadro.

Je toto potlačenie výraznejšie alebo naopak slabšie v porovnaní s potlačením pri spätnom rozptyle (časť (b))?

(e) Bude *pre uvažovaný rozptyl* pri nejakom uhle rozptylu potlačenie až na nulu kvôli priestorovému rozloženiu náboja jadra? Ak áno, odhadnite tento uhol. Ak nie, vysvetlite, prečo nie.

(f) Bude *pre uvažovaný rozptyl* pri nejakom uhle rozptylu namiesto potlačenia zosilnenie rozptylu? Ak áno, odhadnite tento uhol. Ak nie, vysvetlite, prečo nie.

Poznámka: uvedeným experimentom môžeme skúmať štruktúru jadra, pričom postupujeme opačne: odmeriame potlačenie rozptylu voči výsledkom teoreticky vypočítaným pre bodové jadro a potom fitujeme tvar jadra, aby sme dostali súhlas s meraním. Súčasťou fitu sú aj rôzne hypotézy pre nerovnomerné roz-

delenie elektrického náboja v jadre.

[2 body]

7. rozptyl na tienenom Coulombovom potenciáli

Pri odvodení $f(\theta, \varphi)$ pre Coulombov rozptyl sme si pomohli zavedením tienenia do Coulombovho potenciálu. Tienenie sme neskôr vyplí. V tomto príklade uvažujte skutočný tienový potenciál.

(a) Určte diferenciálny účinný prierez $\left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|$ a celkový účinný prierez σ pre tento rozptyl.

Načrtnite predpoveď pre experimentátorov, ako sa bude s rozptylovým uhlom meniť počet detekovaných častíc.

(b) Koľko vychádza σ vo fm^2 pre tienenie $\mu = 1/R_0$ a $R_0 = 100 \text{ fm}$? Ostatné parametre zoberte z predchádzajúceho príkladu, časť (a). **[2 body]**

8. amplitúda rozptylu pomocou parciálnych vln

Uvažujme rozptyl, ktorý nastáva iba v s a p vlne, vo vyšších vlnách už nenastáva. Čo to znamená pre fázové posuny týchto vyšších vln?

Nech navyše vieme, že pri danej energii je fázový posun v s a p vlne rovnaký. V akom smere sa bude rozptylovať najviac častíc?

Určte σ integráciou dif. účinného prierezu, aj z optickej teorémy. Súhlasia? **[2 body]**

9. nabitá častica v el-mag poli

Na prednáške sme ukázali, že $(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - Q\vec{A}'(\vec{r}, t))$ pri pôsobení na $\Psi'(\vec{r}, t) = e^{iQ\alpha(\vec{r}, t)}\Psi(\vec{r}, t)$ presunie faktor s komplexnou fázou pred uvedenú zátvorku. Pričom sa zmení $\vec{A}'(\vec{r}, t)$ na nečiarkované $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Ukážte, že rovnaký výsledok dostaneme aj pre zátvorku $(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - Q\varphi'(\vec{r}, t))$.

Uvedené vlastnosti súvisia s tým, že až na faktory $\hbar$ a i predstavujú zátvorky kovariantné derivácie relativistickej $U(1)$ symmetrickej kalibračnej teórie. **[2 body]**

10. časová poruchová metóda

Na prednáške sme predviedli vzorové riešenie pre výpočet pravdepodobnosti excitácie nabitého JHO vo vonkajšom elektrickom poli s časovým vývojom $f(t) = e^{-t^2/\tau^2}$ pre $t \in (-\infty, \infty)$. Zopakujte tento výpočet pre elektrické pole

s časovým vývojom $\tilde{f}(t) = e^{-t/\tau}$ pre $t \in (0, \infty)$. V tomto prípade je teda pole náhle zapnuté v čase $t = 0$ a potom exponenciálne odznieva. Nás zaujíma prevdepodobnosť excitácie po odznení poľa.

Možno porovnať, ktorý časový priebeh je výhodnejší pre excitáciu? **[2 body]**

11. bonus príklad: porovnanie Bornovej aproximácie a parciálnych vĺn

Na prednáške sme ukázali, že pre rozptyl na konštantnom potenciáli V_0 v guľi dostávame zhodu medzi výsledkami Bornovej aproximácie a rozptylom v s vlne. Pomohli sme si pri tom limitou $q \rightarrow 0$. (Teda pre energiu častice $E \ll V_0$.) Ukážte, že zhoda nastáva aj vtedy, ak túto limitu neuvažujeme.

[2 body]