

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.4

riešenia, prosím, odovzdajte do 28.05.2025

1. moment hybnosti

(a) Odvoďte matice J_z , J_x a J_y - odporúčam v tomto poradí - pre ireducibilnú reprezentáciu (irrep) $j = 2$. Začnite tým, že určíte jej dimenzionalitu.

(b) Overte, že platí $[J_z, J_x] = iJ_y$.

(c) Čomu sa má rovnať súčet matíc $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$? Overte, že Vaša predpoveď je splnená.

(d) Je možné medzi päťrozmernými stavmi $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, \alpha_5)^T$, kde $\alpha_i \in \mathbb{C}$ a $\sum_{i=1}^5 |\alpha_i|^2 = 1$, identifikovať skalárny stav (taký, čo sa nebude meniť pri rotáciách) ? Ak áno, určte ho. Ak nie, prečo nie. **[2 body]**

2. skalárny súčin pri skladaní dvoch vektorov

Príklad nadväzuje na skladanie dvoch vektorových irreps z prednášky.

(a) Ukážte, že pre vektorové polia $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nám naozaj zo skladania vychádza ich štandardný skalárny súčin $(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)$ pre súradnicovú reprezentáciu stavu $|00\rangle$.

(b) Priamym výpočtom ukážte, že v uvažovanom skladaní naozaj platí $\hat{J}_+|00\rangle = 0$ a takisto $\hat{J}_-|00\rangle = 0$.

(c) Predpokladajme, že máme prístroj (napr. Stern-Gerlach, ak by šlo o spiny), ktorý dokáže merať z-komponentu momentu hybnosti prvého vektorového poľa. S akou pravdepodobnosťou odmeria $m_1 = 0$ pre vyššie spomínaný stav $|00\rangle$?

S akou pravdepodobnosťou odmeria $m_1 = 0$ pre stav $|20\rangle$?

S akou pravdepodobnosťou odmeria $m_1 = 0$ pre stav $|10\rangle$?

Len kvôli intuícii, predstavme si, že by bol nabitý W bozón zo štandardného modelu stabilný a mal malú hmotnosť v porovnaní s hmotnosťou protónu. (Ani jedno neplatí. Rozpadá sa za menej ako milióntinu sekundy a jeho hmotnosť je 80-krát väčšia ako m_p .) W bozón má spin 1, na rozdiel od elektrónu so spinom $1/2$. Ak by bol stabilný, mohol by tvoriť vodíku podobný atóm a naše otázky v časti (c) by sa týkali takéhoto atómu, kde orbitálny moment

W bozónu by bol daný kvantovým číslom $\ell = 1$. Skladanie orbitálneho momentu hybnosti a spinu W bozónu do celkového momentu hybnosti W bozónu by potom odpovedalo úvahám v tomto príklade. **[2 body]**

3. skladanie momentov hybnosti

Uvažujme skladanie momentov hybnosti $j_1 = 2$ a $j_2 = 1/2$. Inými slovami uvažujme tenzorový súčin týchto dvoch irreps. Určte, aké irreps vychádzajú pri tomto skladaní. Overte, že sa nezmení dimenzionalita zloženej sústavy, ak budeme namiesto reducibilnej bázy uvažovať ireducibilnú. Nájdite Clebsch-Gordanove koeficienty pre transformáciu reducibilnej bázy na ireducibilnú.

Uvažujme atóm vodíka. S akou pravdepodobnosťou nameriame elektrónu spin dolu, ak je elektrón v stave s $\ell = 2$ a jeho celkový moment hybnosti (od spinu aj od orbitálneho momentu hybnosti) je $J = 5/2$ s priemetom $M = 1/2$?

Poznámka: Spomeňte si, že toto skladanie by bolo potrebné, ak by sme skúmali Zeemanov jav pre elektrón vo vodíku v druhom excitovanom stave. Čo sme nerobili a ani robiť nebudeme, keďže by si to vyžadovalo prácu s 18-rozmernými maticami namiesto 8-rozmerných pre prvý excitovaný stav.

[2 body]

4. skladanie dvoch spinov $1/2$

Prečítajte si podkapitolu 16.3 v Zelenej knihe. Ak ju nemáte v dosahu, link je na stránke kurzu. Slovné dovysvetľujte, teda preukážte vlastné porozumenie poslednému vzťahu: prečo pri rozptyle (čiže zrážke) dvoch elektrónov uvažujeme kvadrát rozdielu amplitúd s váhou $3/4$ a kvadrát súčtu amplitúd s váhou $1/4$.

[2 body]

5. operátor rotácie v reprezentácii vlnovými funkciami

(a) Na prednáške sme definovali operátor $\hat{U}_{\vec{n}}(\alpha)$ a odvodili jeho tvar v (súradnicovej) reprezentácii pomocou vlnových funkcií. Vysvetlite význam jeho pôsobenia na vlnovú funkciu a napíšte explicitne jeho tvar.

(b) Ako sa zjednoduší $\hat{U}$ pre rotáciu okolo osi z o uhol α ?

Za operátor $\hat{L}_z$ dosadzte, čomu sa rovná vo sférických premenných. Dostávate "posunutie" azimutálneho uhla φ o uhol α ?

Poznámka: Je užitočné si predstaviť, že $\hat{U}$ pôsobí na vlnovú funkciu bodovej

častice - napr. elektrónu v atóme vodíka - zadanú vo sférických súradniciach.

(c) Načrtnite v 3-d priestore hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu v atóme vodíka, kde elektrón je v prvom excitovanom stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}) = A e^{-r/2a} r \sin \theta \cos \phi$.

Pamätáte si kvantové čísla tohto stavu?

(d) Ako by mal vyzeráť oblak pravdepodobnosti výskytu elektrónu po rotácii atómu z časti (c) o 90° okolo osi z ? Overte, že operátor rotácie $\hat{U}_z(\frac{\pi}{2})$ naozaj dá tomu odpovedajúcu vlnovú funkciu, ak pôsobí na $\Psi(\vec{r})$ z časti (c).

Využite rozvoj do Taylorovho radu $f(x + \varepsilon) = e^{\varepsilon \frac{d}{dx}} f(x)$.

(e) Podobne načrtnite, ako by mal vyzeráť oblak pravdepodobnosti výskytu elektrónu po rotácii atómu z časti (c) o všeobecný uhol α okolo osi z .

[2 body]

6. operátor rotácie v reprezentácii vlnovými funkciami

(a) Vypočítajte pôsobenie operátora rotácie $\hat{U}_z(\alpha)$ na vlnovú funkciu voľnej častice s ostrou hodnotou hybnosti $(0, 0, p)$. Je výsledok v súlade so zdravým sedliackym rozumom?

(b) Vypočítajte pôsobenie operátora rotácie $\hat{U}_{\vec{n}}(\alpha)$ na vlnovú funkciu elektrónu v atóme vodíka v základnom stave. Je výsledok v súlade so zdravým sedliackym rozumom?

Dostávame rovnaký výsledok pre elektrón v s -stave pre ľubovoľnú excitovanú hladinu?

[2 body]

7. operátor rotácie v spinorovej reprezentácii

(a) Overte, že platí $\hat{U}_{\vec{n}}(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - i (\sin \frac{\alpha}{2}) \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$, kde $\vec{n}$ a α sú ľubovoľné a $\hat{U}_{\vec{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{J}/\hbar}$.

Pre spinory $\vec{J} = \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$, a spravidla je teraz $\hbar = 1$. Použite $n_i n_j \sigma_i \sigma_j = n_i n_j \delta_{ij}$, čo plynie zo $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$.

(b) Zarotujte spin $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ o uhol 90° okolo osi x . Čo ste dostali? Je výsledok v súlade so zdravým sedliackym rozumom? Ak si nepamätáte, pripomeňte si vlastné vektory Pauliho matíc.

(c) Uvažujte spin "hore" elektrónov po prechode cez všeobecný SG $_{\vec{n}}$, kde $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ je nejaký jednotkový vektor definujúci smer natočenia SG prístroja. Zapôsobte na uvažovaný spinový stav operá-

torom $\hat{U}_z(\alpha)$. Čo ste dostali? Je výsledok v súlade so zdravým sedliackym rozumom? Akým SG prístrojom by sme originálne (čiže pred rotáciou, resp. bez uvažovania rotácie) pripravili tento stav? **[2 body]**

8. matica hustoty

(a) Na prednáške sme v druhom motivačnom príklade uvažovali rozpad častice X s nulovým spinom na dva elektróny, pričom experiment meral iba spinový stav prvého elektrónu. Ukázali sme, že tomuto elektrónu nemožno priradiť čistý spinový stav. Jeho spinový stav popisovala matica hustoty. Napíšte túto maticu.

(b) Teraz uvažujme, že častica X má spin 1 a s priemetom +1 do smeru z a opäť sa rozpadá na dva elektróny, pričom meriame iba spinový stav prvého elektrónu. Čo možno predpovedať o výsledku merania jeho spinového stavu? Je to čistý stav? Ak by sme sa rozhodli opisovať jeho spinový stav maticou hustoty, aký by mala tvar? Napíšte ju.

(c) To isté ako v časti (b), len uvažujme, že priemet spinu častice X do smeru z je nula. **[2 body]**

9. matica hustoty

(a) Experimentátori dostávajú zväzok elektrónov a merajú na ňom spinový stav jednotlivých elektrónov. Pomocou série meraní im vychádzajú stredné hodnoty $\overline{S}_x = \hbar/4$, $\overline{S}_y = \hbar/4$ a $\overline{S}_z = 0$. Čo možno predpovedať o spinovom stave elektrónov vo zväzku? Je to čistý stav? Ak by sme sa rozhodli opisovať uvažovaný spinový stav maticou hustoty, aký by mala tvar? Napíšte ju. Je zväzok polarizovaný? Ak áno, určte absolútnu hodnotu jeho polarizácie.

(b) Čo sa zmení na odpovediach časti (a), ak sú merané stredné hodnoty $\overline{S}_x$ a $\overline{S}_y$ väčšie faktorom $\sqrt{2}$?

(c) Je možné merať $\overline{S}_x \neq 0$ a tento výsledok mať vykompenzovaný nejakým $\overline{S}_y$ tak, aby z toho vyšlo, že zväzok je nepolarizovaný? **[2 body]**

10. matica hustoty

Uvažujme polarizovaný elektrónový zväzok s polarizáciou $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ v statickom homogénnom magnetickom poli v smere osi z . Predpovedajte strednú hodnotu energie elektrónu vo zväzku. **[2 body]**

11. bonus príklad

Príklad nadväzuje na príklad **2.(a)**.

Ukážte, že pre vektorové polia $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ nám naozaj zo skladania vychádza ich vektorový súčin pre súradnicovú reprezentáciu stavu $|1\,0\rangle$. **[2 body]**