

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.1

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvika 10.10.2025

1. fundamentálne konštanty

Zídu sa tu hodnoty $\hbar = 1.054571800 \times 10^{-34} \text{ Js}$ a $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$. Presnú hodnotu ϵ_0 v SI sústave si, prosím, zistíte sami.

(a) Vypočítajte súčin $\hbar c$ s presnosťou na 5 platných miest a okomentujte, akej percentuálnej nepresnosti sa dopustíme, ak budeme vo výpočtoch používať pre tento súčin jeho približnú hodnotu navrhnutú na cvičení.

(b) Napíšte (skúste spamäti) definíciu bezrozmernej konštanty jemnej štruktúry α .

(c) Napíšte jej približnú číselnú hodnotu v tvare $1/X$, kde X je celé číslo. Odpovede (b), (c) si treba pamätať.

(d) Vychádzajúc z rozmerov konštánt e^2 , ϵ_0 , $\hbar$ a c v definícii dokážte, že coulombovy, metre, sekundy kilogramy sa navzájom vykrátia a ponechajú veličinu α naozaj bezrozmernú.

(e) Čo má bezrozmerná konštanta jemnej štruktúry α fyzikálne spoločné s α časticou, keďže sa rovnako volajú? Pomôcka je na konci bónusového príkladu.

(f) Nakoniec vypočítajte, akej percentuálnej chyby sme sa dopustili pri uvažovaní hodnoty $\alpha = 1/X$ a zaokrúhlení X na celé číslo. **[2 body]**

2. využitie súčinu $\hbar c$ pri praktickom počítaní

Jednoduchá a ľahko zapamätateľná približná numerická hodnota pre súčin $\hbar c$ nám umožňuje rýchlo počítať bez kalkulačky, ak sa $\hbar c$ vyskytuje v nejakom výsledku a nám stačí výsledok s presnosťou na úrovni pár percent. Dokonca aj ak sa $\hbar c$ vo výsledku nevyskytuje, ale je tam samotné $\hbar$, alebo c , pri rýchlom počítaní môže byť užitočný trik rozšíriť konštantu napr. $\hbar$ na $(\hbar c)/c$.

(a) Určte **bez použitia kalkulačky** farbu (t.j. vlnovú dĺžku) svetla prvej (bežne najintenzívnejšej) viditeľnej čiary v spektre atómu vodíka vychádzajúcej z $E_n = E_1/n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) a $E_1 = -13.6 \text{ eV}$.

Nakoľko výsledok nášho počítania nemusí byť super presný, konštanty možno

zaokrúhľovať na pár percent. Napríklad $2\pi \approx 6.3$ alebo - ak sa naozaj veľmi veľmi ponáhľate - $2\pi \approx 6$ je na hranici akceptovateľnosti (ale nie je dobre si zvykať až na takúto hrubú aproximáciu).

(b) Podobne bez použitia kalkulačky ukážte, že v spektre vodíka sa nenachádza žltá čiara. **[2 body]**

3. využitie súčinu $\hbar c$ pri praktickom počítaní

(a) Bez kalkulačky odhadnite/vypočítajte (z vyššie povedaného) čo najpresnejšie hodnotu $(\alpha\hbar c/2a_B)$, kde a_B je Bohrov polomer spomenutý na prednáške. Máme na mysli použitie približných hodnôt pre α , $\hbar c$ a a_B pri výpočtoch "na prstoch".

(b) Skúste odhadnúť chybu výsledku.

(c) Vypočítajte teraz túto hodnotu ešte raz s presnosťou na štyri platné miesta, s pomocou kalkulačky. Hodnotu a_B s potrebnou presnosťou buď vypočítajte alebo pozrite na internete.

(d) Viete rozoznať, akej fyzikálnej veličine je rovný Váš výsledok? Napadlo by Vás to z približného výsledku "na prstoch"? **[2 body]**

4. častica na úsečke - ortogonalita funkcií $\{\Psi_n(x)\}$

Toto je príklad z cvika, ktorý bol preskočený. Ukážte, že platí

$$\int_0^L \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{mn}, \text{ pre } m, n = 1, 2, 3, \dots$$
 [2 body]

5. častica na úsečke

(a) Načrtnite vlnovú funkciu (v čase $t = 0$) tretieho excitovaného stavu a hustotu pravdepodobnosti výskytu častice na úsečke v tomto stave.

Dajte pozor na správny počet hrbov a tiež na ich tvar, najmä v druhom prípade: v blízkosti miním nemajú byť žiadne hroty.

(b) Sú miesta vo vnútri úsečky, teda mimo krajných bodov, v ktorých je nulová šanca namerať prítomnosť častice? *Presnejšie by sme mali hovoriť o týchto bodoch s ich maličkým okolím, v ktorých nájdeme časticu s takmer nulovou pravdepodobnosťou.*

Ktoré body to sú?

(c) Čo by ste odpovedali na otázku: Ako sa častica v uvažovanom stave presúva po úsečke medzi oblasťami s veľkou pravdepodobnosťou výskytu, ak má v ceste bod s nulovou (presnejšie malú oblasť s takmer nulovou) pravdepo-

dobnosťou výskytu?

[2 body]

6. limitné prípady k výsledkom pre r_{ATOM} a E_{ATOM}

(a) Vo výsledkoch pre r_{ATOM} a E_{ATOM} vystupuje rýchlosť svetla c . To zdanlivo vyzerá byť v rozpore s tvrdením, že elektrón možno uvažovať ako nerelativistický. V nerelativistickej fyzike konštanta c nevystupuje, nerelativistický opis dostávame z relativistického v limite $c \rightarrow \infty$. Dosadením za α ukážte, že r_{ATOM} a E_{ATOM} nie sú v skutočnosti závislé na c a teda sa nezmenia, ak budeme uvažovať nerelativistickú limitu $c \rightarrow \infty$.

(b) Klasickú mechaniku dostávame z kvantovej teórie v limite $\hbar \rightarrow 0$. Vidno to napríklad zo vzťahu neurčitosti $\Delta x \Delta p_x \simeq \hbar$. Možno povedať, že touto limitou vypíname kvantovú povahu sveta.

Čomu vychádza rovný rádový odhad pre E_{ATOM} a r_{ATOM} v tejto klasickej limite?

Okomentujte, či sú tieto výsledky v zhode s tým, čo očakávame od klasickej fyziky.

(c) Čomu vychádza rovný rádový odhad energie a veľkosti atómu v limite, keď hmotnosť elektrónu $m_e \rightarrow 0$?

Zamyslite sa nad veľkosťou atómu v limite, keď $m_e \rightarrow 0$, ale nie je presne rovné nule. Aký atóm vtedy dostávame? S akými dôsledkami pre veľkosť proteínov, buniek, ... živých bytostí, hviezd a planét, ak by existovali?

Existovali by atómy, keby elektrón nemal hmotnosť?

V súčasnosti sme presvedčení, že elektrón má hmotnosť vďaka prítomnosti nenulového Higgsového poľa v celom priestore. Porozumieť tomu viac možno v 5.ročníku na prednáške o štandardnom modeli (ŠM). Objav Higgsového bozónu v r.2012 na urýchľovači LHC tak nepriamo vniesol hlbšie porozumenie aj do pôvodu stability atómov. Podľa ŠM bez Higgsového poľa by mal elektrón nulovú hmotnosť a ako sme sa práve presvedčili, atómy by nevznikli. [2 body]

7. ťažšie atómy s jedným elektrónom

Uvažujme jediný elektrón viazaný k jadru hélia, lítia, prípadne ďalších ťažších prvkov, vo všeobecnosti s počtom protónov v jadre rovným Z . Tieto atómy sú teda čiastočne ionizované, ostal im už len jeden elektrón. Určte, čomu sú rádovo rovné typické väzbové energie elektrónu v takýchto atóмоch voči typickej energii elektrónu v atóme vodíka. Sú väčšie, menšie, rovnaké? Koľkokrát? Dáva vaša odpoveď zmysel?

Pomôcka: Prihliadnite na to, že možno zopakovať výpočet z prednášky s roz-

dielom, že teraz je potenciálna energia elektrónu rovná $-(Z\alpha\hbar c)/r$.

(b) Ako je to s rádovým odhadom typického rozmeru takýchto čiastočne ionizovaných atómov v porovnaní s rozmerom atómu vodíka? Sú tieto ióny väčšie alebo menšie? Koľkokrát? Dáva vaša odpoveď zmysel? **[2 body]**

8. spektrálne čiary ťažších prvkov s čiastočne ionizovanými atómami s jedným elektrónom

Na základe predchádzajúcej odpovede uvažujte spektrálne čiary čiastočne ionizovaného hélia. Je medzi nimi spektrálna čiara žltej farby? V príklade 2. ste mali odvodiť, že taká čiara v spektre vodíka nie je. Ako je to u (ionizovaného) hélia? **[2 body]**

9. častica viazaná vo štvorci o strane L

Uvažujme časticu (v dvoch rozmeroch) viazanú na štvorec o strane L . Jej stav s energiou $E_{m,n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(m^2+n^2)$ je popísaný vlnovou funkciou $\Psi_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi y}{L}$.

(a) Aká je energia 1., 2. a 3. excitovaného stavu ako násobok $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$?

(b) Aká je degenerácia týchto stavov? **[2 body]**

10. častica viazaná v kocke s hranou L

Zovšeobecnite tvrdenia predchádzajúceho príkladu na trojrozmerný prípad a odpovedzte na tie isté otázky pre časticu v troch rozmeroch viazanú v kocke o hrane L . **[2 body]**

11. bonus príklad - princíp neurčitosti a gravitačne viazané stavy

Aký je typický rozmer gravitačne viazanej sústavy dvoch neutrónov, ak zoberieme do úvahy princíp neurčitosti? Ignorujme silnú aj zvyškovú elektromagnetickú silu (kvôli kvarkom v neutróne).

Budú sa neutróny dotýkať, keďže sa gravitačne priťahujú? **[2 body]**

Pomôcka k príkladu 1.(e): NIČ.