

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.2

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvika 17.10.2025

1. častica na úsečke

Navrhните vlnovú funkciu častice, ktorej možno namerať iba

- (a) dve rôzne hodnoty energie E_1 a $9E_1$, s pravdepodobnosťami v pomere 1:1
- (b) dve rôzne hodnoty energie E_1 a $9E_1$, s pravdepodobnosťami v pomere 1:9
- (c) štyri rôzne hodnoty energie E_1 , E_2 , E_3 a E_4 , s pravdepodobnosťami v pomere 4:3:2:1. **[2 body]**

2. častica na úsečke

Navrhните vlnovú funkciu častice na úsečke, ktorá bude popisovať časticu, ktorej možno namerať iba dve rôzne energie, pričom stredná hodnota meraní energie na veľa takýchto identicky pripravených časticiach bude

- (a) $\frac{5}{2}E_1$;
- (b) $10E_1$.
- (c) Koľko rôznych možností pre dvojice meraných energií existuje pre odpoveď na otázku (b)? Odpoveď zdôvodnite.
- (d) Ktorá z možností v (c) má najmenšiu strednú kvadr. odchýlku ΔE ? **[2 body]**

3. častica na úsečke

Uvažujme stav v čase $t = 0$ daný vlnovou funkciou $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1(x) + i\Psi_2(x))$.

(a) Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu tejto častice v čase $t = 0$. V náčrtku dajte pozor na tvar chvostov a údolia funkcie $|\Phi(x)|^2$.

(b) Napíšte, čomu je rovné $\Phi(x, t > 0)$.

Je táto častica v stacionárnom stave?

Určte, či je hustota pravdepodobnosti $|\Phi(x, t > 0)|^2$ periodická v čase. Ak áno, určte jej periódu T ako násobok $\hbar/E_1$. V odpovedi venujte pozornosť tomu, že perióda je **najkratší** interval, po ktorom sa funkcia "opakuje".

(c) Načrtnite **štyri** obrázky, ktorými zdokumentujete, ako sa mení hustota pravdepodobnosti výskytu častice počas jednej periódy pre časy $0, T/4, T/2, 3T/4$. (Prvý z nich už máte v časti (a).)

(d) Je stredná poloha častice $\bar{x}(t)$ počas periódy stále rovnaká alebo sa mení? Ak sa mení, popíšte slovne, aký pohyb koná napr. voči stredu úsečky.

Je to harmonické kmitanie? Odpoveď vysvetlite. *Harmonické znamená závislosť od času ako $\cos \omega t$ alebo $\sin \omega t$.* **[2 body]**

4. častica na úsečke - stacionárne stavy

(a) Pre stacionárne stavy sme na prednáške predviedli výpočty normovacej konštanty vlnovej funkcie $\Psi_n(x)$ a strednej hodnoty merania polohy. Po každé vyšlo, že výsledok nezávisel od n . Okomentujte a slovne zdôvodnite, či bude aj Δx nezávislé od n .

(b) Vypočítajte v každom z týchto stavov strednú kvadratickú odchýlku pre meranie polohy $\Delta x = (\overline{x^2} - \bar{x}^2)^{1/2}$. Dostávate zhodu so svojím tvrdením v (a)?

(c) Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v stacionárnom stave v limite $n \gg 1$.

Náčrtok motivuje k predpovedi, že v tejto limite dostávame to isté Δx ako pre rovnomerné rozdelenie. Overte, že je tomu naozaj tak.

Treba k tomu osobitne vypočítať Δx pre rovnomerné rozdelenie náhodnej premennej x na intervale $< 0, L >$. [2 body]

5. = A10. Zbierka, str.17 tlačená verzia a str.15 pdf. Častica na úsečke.

Aproximujte π elektróny v molekule hexatriénu šiestimi neinteragujúcimi elektrónmi viazanými na úsečku dĺžky L a určte rozdiel medzi energiou základného a prvého excitovaného stavu takejto sústavy. *Poznámky: $L = N \times \Delta\ell$, kde $N = 6$ je počet elektrónov a $\Delta\ell = 0.289/2 = 0.1445 \text{ nm}$ je stredná vzdialenosť medzi atómami uhlíka. Zarátané tu je vyčnievanie elektrónového oblaku z uhlíkového reťazca o dĺžku $\Delta\ell/2$ na každú stranu. Molekulu hexatriénu si tu možno predstaviť ako šesť osmičiek vedľa seba, kde sa dve susedné osmičky dotýkajú, až mierne prekrývajú. Odporúčam nakresliť si náčrtok. V uzle každej osmičky je uhlík. Hustota pravdepodobnosti výskytu π elektrónov má tvar tých osmičiek. Prekrývy osmičiek umožňujú pohyb π elektrónov naprieč osmičkami mimo uhlíkového reťazca, paralelne s ním.*

V akej časti el-mag spektra sú fotóny z takýchto prechodov? Porovnajte s experimentálnym údajom uvedeným v texte v Zbierke.

Je hexatrién vhodný ako farbivo? (T.j. odpovedá prechod pohlcovaniu elmag žiarenia z viditeľného spektra?)

Aká podobná lineárna molekula: dlhšia (viac atómov C) či kratšia (menej atómov C), by mohla byť vhodná ako farbivo vďaka študovanému prechodu? [2 body]

6. Zbierka, príklad A1., str.44 (tlačená verzia) a str.33 (pdf).

Častica je na úsečke $< 0, L >$ v stave s vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ax(L - x)$.

(a) Načrtnite vlnovú funkciu častice.

Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu tejto častice na úsečke.

Bez počítania určte strednú hodnotu merania polohy častice.

(b) Vypočítajte normováciu konštantu A .

Odporúčame pritom položiť $L = 1$ a využiť beta funkciu $\int_0^1 t^M (1-t)^N dt = \frac{M! N!}{(M+N+1)!}$. Do výsledku dodajte správnu mocninu L .

(c) Vypočítajte pravdepodobnosť $P(E_1)$ namerať častici v tomto stave energiu základného stavu E_1 .

Pomôcka: treba k tomu vypočítať koeficient c_1 v rozvoji $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n(x)$. Určíme ho vďaka ortogonalite funkcií $\Psi_n(x)$ dokazovanej v minulej dú.

(d) Čo sa dá bez počítania povedať o $P(E_2)$?

(e) Čo sa dá bez počítania povedať o $P(E_3)$?

(f) Ako súvisí Váš výsledok pre $P(E_1)$ s tvarom funkcie $\Psi(x)$ podobnému tvaru $\Psi_1(x)$? **[2 body]**

7. = A11 Zbierka str.16 (tlačená verzia) a str.19 (pdf).

Elektrón je viazaný na úsečke a nachádza sa v základnom stave. Vyjadrite silu, ktorou treba zvonka pôsobiť na krajné body úsečky. Má úsečka s elektrónom tendenciu sa rozopnúť alebo sa stiahnuť?

Návod: Ako závisí energia od dĺžky úsečky L ?

Ak sa dĺžka zväčší na $L + dL$, ako sa zmení energia do prvého rádu v dL ?

Kto koná prácu pri rozťahnutí úsečky z L na $L + dL$: elektrón na vonkajší svet, alebo vonkajší svet na elektrón? Ako pomocou sily vyjadriť túto prácu? **[2 body]**

8. *nadväzuje na predchádzajúci príklad*

Porovnajme silu F_1 z výsledku príkladu 7. s Coulombovou silou F_2 na elektrón vo vzdialenosti L od kladne nabitého jadra v atóme vodíka.

Okomentujte, či je dôvod očakávať, že niektorá z týchto dvoch síl je zjavne väčšia než druhá.

Numericky vypočítajte pomer F_2/F_1 pre $L = a_1 = 0.5 \times 10^{-10}\text{m}$ (Bohrov polomer). Pri výpočte nechceme používať kalkulačku, ak netreba. Preto doplňte výraz s $e^2/4\pi\epsilon_0$ na bezrozmernú hodnotu $\alpha = 1/137$, a využite známu hodnotu súčinu $\hbar c$ a $m_e c^2$. **[2 body]**

9. *častica na úsečke: prechod ku klasickej fyzike*

a) Nech je častica v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = A \sum_{n=91}^{110} \Psi_n(x)$, kde $\Psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin nx$ a A je normovacia konštanta. Jednotky dĺžky sme zaviedli také, že v nich $L = \pi = 3.14$ a $\sin \frac{n\pi x}{L}$ sa zjednoduší na $\sin nx$.

Nechajte si vykresliť túto funkciu nejakým grafickým programom (postačí napr. zadať ju do Google Search s hodnotou $A=1$, a vhodne nastaviť škálovanie na osiach obrázka) a obrázok zhruba prekreslite pre $x \in < 0, 3.14 >$. Možno povedať, že táto častica sa nachádza v nejakom úzkom intervale na úsečke? Ak áno, kde?

(b) Určte normovaciu konštantu A funkcie $\Psi(x)$.

(c) To isté, čo v (a), len teraz $\Psi(x) = A \sum_{n=91}^{110} (-1)^n \Psi_n(x)$ (alternujú znamienka). Kde je zhruba lokalizovaná častica v tomto stave?

(d) Navrhните svoju vlastnú normovanú superpozíciu rôznych dvadsiatich funkcií $\Psi_n(x)$ s $n \gg 1$, aby bola častica v tomto stave lokalizovaná v tesnom okolí stredu

úsečky. Znázorníte si ju graficky na počítači a približne prekreslite do riešenia, alebo vytlačte váš obrázok.

Návod: Možno sa napr. poučiť z tvaru $\Psi_n(x)$. Ktoré z nich a s akým znamienkom maximalizujú pravdepodobnosť výskytu častice v polovici úsečky? **[3 body]**

10. bonus príklad: nerelativistická vs. relativistická častica, de Broglieho vlnová dĺžka
(a) Elektrón je z pokoja urýchlený potenciálovým rozdielom 1 V a ďalej letí voľný (t.j. bez prítomnosti vonkajšieho poľa). Akú má energiu? (Použite priateľské jednotky, a nie SI.)

Vypočítajte de Broglieho vlnovú dĺžku λ tohto elektrónu. *Odpovedzte bez použitia kalkulačky, vhodným rozšírením zlomku pre λ obetujúc presnosť pár percent.*

(b) Ako sa škáluje vypočítaná λ voči potenciálovému rozdielu? Bez počítania určte na základe výpočtu v časti (a) de Broglieho vlnovú dĺžku pre elektrón urýchlený z pokoja potenciálovým rozdielom 2-krát väčším, t.j. 2 V. Prípadne vo všeobecnosti k -násobne väčším.

(c) Možno analogicky k časti (b) určiť de Broglieho vlnovú dĺžku aj pre elektrón urýchlený z pokoja potenciálovým rozdielom miliónkrát väčším, t.j. 1 MV? Aká je vlnová dĺžka takéhoto elektrónu?

(d) Aká je vlnová dĺžka elektrónu urýchleného z pokoja potenciálovým rozdielom 1 GV? *Možno v riešení zanedbať $m_e c^2$ voči energii urýchleného elektrónu? Ak áno, tak to urobte.*

(e) Aká je vlnová dĺžka elektrónu urýchleného z pokoja potenciálovým rozdielom 2 GV? *Odpovedzte bez počítania pomocou výsledku v (d).*

(f) Porovnajzte škálovanie λ voči potenciálovému rozdielu ΔV v (e) so škálovaním v (b).

Prečo sa výsledok z časti (c) neškáluje ani podľa (b) ani podľa (e)? T.j. prečo v časti (c) nie je λ homogénnou funkciou ΔV ?

Škálovanie tu znamená, že λ je homogénnou funkciou potenciálového rozdielu ΔV : pre potenciálový rozdiel ΔV zmenený na $k\Delta V$ je λ zmenený na $k^\alpha \lambda$. α je potom škálovací exponent, resp. stupeň homogenity. **[2 body]**