

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.4

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvika 30.10.2025

1. častica na úsečke

Na prednáške sme dali veľký dôraz na to, ako zistíme pravdepodobnosť $P(E_n)$ odmerať energiu E_n na takom stave častice, ktorý nemáme explicitne zadaný ako superpozíciu stacionárnych stavov. V dú, sada č.2, príklad 6. bol konkrétny príklad, aj s odkazom na riešenie v zbierke. Keďže si potrebujeme zapamätať potrebný postup, pridávame ešte ďalšie príklady neriešené v zbierke.

(a) V dú, sada č.2, príklad 6 bol zadaný stav častice popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ax(L - x)$. Načrtnite túto funkciu spolu s odpovedajúcou hustotou pravdepodobnosti výskytu častice $\rho(x) = |\Psi(x)|^2$.

Uvažujte teraz časticu v stave popísanom vlnovou funkciou $\tilde{\Psi}(x) = \tilde{A}x^2(L - x)^2$. Načrtnite túto funkciu, a odpovedajúcu hustotu pravdepodobnosti $\tilde{\rho}(x) = |\tilde{\Psi}(x)|^2$ jej výskytu na úsečke.

Načrtnite ešte aj vlnovú funkciu základného stavu častice $\Psi_1(x)$. Porovnajte, či je tejto funkcii viac podobná $\Psi(x)$ alebo $\tilde{\Psi}(x)$.

(b) Podľa akého vzťahu počítame pravdepodobnosť namerať energiu základného stavu $P(E_1)$ častici v stave Ψ , resp. $\tilde{\Psi}$? Akú rolu tu zohráva podobnosť $\Psi_1(x)$ s funkciami $\Psi(x)$, resp. $\tilde{\Psi}(x)$? Čo možno povedať bez počítania o výsledku pre $P(E_1)$ v uvažovaných dvoch prípadoch? Budú tieto pravdepodobnosti rovnaké, alebo bude niektorá z nich väčšia ako druhá? Odpoveď zdôvodnite.

(c) Čo možno bez počítania predpovedať o $P(E_1)$, $P(E_2)$, $P(E_3)$ a $P(E_4)$ v stave $\tilde{\Psi}$? Bez počítania zoradte $P(E_1)$ až $P(E_4)$ podľa veľkosti.

Overenie predpovedí nasleduje v záverečnom bonusovom príklade.

[2 body]

2. častica na úsečke, zľahka nadväzuje na predchádzajúci príklad

Uvažujte stav častice na úsečke popísaný vlnovou funkciou $\Psi'(x) = A'x$ pre $x \in < 0, L/2 >$ a $\Psi'(x) = A'(L - x)$ pre $x \in < L/2, L >$. Mimo úsečky je $\Psi' = 0$. Načrtnite $\Psi'(x)$.

(b) Vypočítajte normovaciu konštantu A' .

(c) Tipnite si bez počítania poradie $P(E_1)$ až $P(E_4)$ podľa veľkosti pre časticu v stave Ψ' .

(d) Vypočítajte $P(E_1)$ a okomentujte zhodu s (c).

(e) Vychádzajúc z vypočítanej $P(E_1)$ okomentujte zhodu s touto pravdepodobnosťou pre stavy Ψ a $\tilde{\Psi}$ z príkladu 1. a príkladu 7., ak ste 7. počítali.

[4 body]

3. základné vlastnosti hermitovského operátora

Ako prvé napíšte spamäti definíciu hermitovského operátora.

Nech $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú hermitovské operátory, ktoré vo všeobecnosti nekomutujú.

Rozhodnite, či sú hermitovské aj nasledujúce operátory:

- (a) operátor $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ (súčet operátorov),
 - (b) operátor $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$ (súčin operátorov),
 - (c) operátor $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ (antikomutátor herm. operátorov),
 - (d) operátor $\hat{C} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ (komutátor herm. operátorov),
 - (e) operátor $\hat{C} = \hat{A}^2$ (druhá mocnina hermitovského operátora),
 - (f) operátor $\hat{C} = \hat{A}^n$ (n-tá mocnina hermitovského operátora).
- [3 body]**

4. hermitovský operátor

Preverte (z definície alebo využitím príkladu 3.), či sú hermitovské nasledujúce operátory:

- (a) operátor druhej derivácie (pozn: na cviku ste ukázali, že ∂_x nie je hermitovský),
 - (b) operátor $\hat{p}_x^2$ (pozn: na cviku ste ukázali, že $\hat{p}_x$ je hermitovský),
 - (c) hamiltonián pre voľnú časticu v troch rozmeroch,
 - (d) operátor momentu hybnosti $\hat{L}_z$ (jeho z-ová zložka) $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$,
 - (e) operátor $\hat{P}$ (operátor parity): $\hat{P}\Psi(x) = \Psi(-x)$,
 - (f) operátory tretej a štvrtej derivácie (pozn: nadväzuje na (a)).
- [3 body]**

5. definícia hermitovosti

Na prednáške sme zadefinovali hermitovosť operátora $\hat{A}$ pomocou rovnosti $\int \Phi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A} \Phi)^* \Psi$, platnej pre ľubovoľné dve kvadraticky integrovateľné funkcie Φ, Ψ .

Mohlo by sa zdať, že táto definícia je viac všeobecná, ako keby sme definovali hermitovosť $\hat{A}$ pomocou rovnosti $\int \Psi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A} \Psi)^* \Psi$, v ktorej vystupuje len jedna funkcia Ψ . Toto však nie je pravda. Naša definícia je **ekvivalentná** definícii $\int \Psi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A} \Psi)^* \Psi$ s jedinou funkciou (kvadraticky integrovateľnou $\Psi(x)$). Dokážte toto tvrdenie.

Treba dokázať, že jedna definícia implikuje druhú a naopak. Pozrite k tomu Zelenú knihu na str.99 - tlačенá verzia, resp. 67 v pdf.

[2 body]

6. výpočet strednej hodnoty zo vzťahu $\bar{A} = \int \Psi^* \hat{A} \Psi$

Toto zadanie je recyklované z minulosti. Áno, odvoláva sa na to isté $\Psi(x)$, aké v tejto sade stretáme v príkladoch 1. , 2(e) aj 7(b).

Uvažujte časticu na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}} x(L-x)$. V minulosti sme našli pravdepodobnosti $P(E_n)$ namerať v tomto stave energiu E_n , netreba ich tu počítať. Sú aj v Zbierke, str.46 tlačенá verzia a 34 v pdf. Ukážte, že predpoveď pre strednú hodnotu merania energie v tomto stave $\bar{E} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n P(E_n)$ dostaneme rovnako (a oveľa pohodlnejšie), ak ju počítame zo vzťahu $\bar{E} = \int_0^L \Psi(x)^* \hat{H} \Psi(x) dx$. Teda vypočítajte $\bar{E}$ oboma spôsobmi a okomentujte zhodu. Nekonečný rad možno spočítať pomocou známej zeta funkcie $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Pripomeňme, že v uvedenom stave je $P(E_1) = 0.999$. Porovnajte preto vypočítanú

$\overline{E}$ s E_1 a okomentujte.

[2 body]

7. bonus príklad

(a) Vypočítajte $P(E_1)$ pre časticu na úsečke v stave $\tilde{\Psi}$ z príkladu 1. *Poznámka 1: nezabudnite na správne normovanie $\tilde{\Psi}(x)$. Poznámka 2: Dobrovoľníci môžu vypočítať $P(E_n)$ a vo výsledku dosadiť $n = 1$.*

(b) Okomentujte rozdiel medzi vypočítanou $P(E_1)$ a $P(E_1)$ pre stav Ψ z dú, sada č.2, príklad 6. *Poznámka: v jeho zadaní je odvolávka na riešenie v Zbierke, takže $P(E_1)$ pre stav Ψ tu netreba ešte raz počítať.*

(c) Okomentujte pre stav $\tilde{\Psi}$ poradie pravdepodobností $P(E_1)$ až $P(E_4)$. Okomentujte, či a ako presne vieme z výsledku $P(E_1)$ odhadnúť bez počítania pravdepodobnosť $P(E_3)$. [2 body]