Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.6

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 14.11.2025

1. *Ehrenfestove vety pre JHO*
(a) Napíšte obe Ehrenfestove vety pre (potenciál) jednoduchého harmonického oscilátora (JHO). Z jednej z nich vyjadrite $\overline{p}$ a dosaďte do druhej, takže dostanete jednu diferenciálnu rovnicu druhého rádu pre $\overline{x}(t)$. Aké riešenie má táto rovnica? Dáva zmysel?

(b) Napíšte ešte raz obe Ehrenfestove vety pre (potenciál) JHO. Z jednej z nich vyjadrite $\overline{x}$ a dosaďte do druhej, takže dostanete jednu diferenciálnu rovnicu pre $\overline{p}(t)$. Aké riešenie má táto rovnica? Dáva zmysel? Porovnajte rovnicu a jej riešenie s analógiou pre $\overline{x}(t)$ z časti *(a)*.

(c) Vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO vychádzajú buď párne alebo nepárne. Vyplýva to podobne ako pre konštantnú potenciálovú jamu zo symetrie $V(x)$, resp. celého $\hat{H}$, a následne $[\hat{H},\,\hat{P}]=0$. (A teda $\hat{H}$ a $\hat{P}$ majú spoločné vlastné funkcie.) Čomu je potom rovná stredná hodnota polohy a stredná hodnota hybnosti oscilátora v týchto stavoch? Aký je ich časový vývoj v *stacionárnych* stavoch? Ako pre stacionárny stav zosúladiť tieto vaše odpovede a riešenia pre $\overline{x}(t)$ a $\overline{p}(t)$ v časti *(a)* a v časti *(b)*?
[2 body]

2. *po častiach konštantný potenciál*
Určte, či existujú viazané a/alebo rozptylové stavy pre sústavy s nasledovnými potenciálmi. (Potenciály načrtnite. $V_0 > 0$ je po každé kladný parameter.) Ak existujú, určte z akého intervalu očakávame energie týchto stavov. Odpovede zdôvodnite.
(i) $V(x) = -V_0$, pre $x \in \langle -b,\,-a\rangle$ a tiež pre $x \in \langle a,\,b\rangle$, $a < b$ sú reálne parametre. Inde je $V(x) = 0$.
(ii) $V(x) = +V_0$, pre $x \in \langle -a,\,a\rangle$ $a \in \mathcal{R}$. Inde je $V(x) = 0$.
(iii) $V(x) = V_0$, pre $x \in \langle -b,\,-a\rangle$ a tiež pre $x \in \langle a,\,b\rangle$. $V(x) = 2V_0$, pre $x \in \langle -a,\,+a\rangle$, $a < b$ sú reálne parametre. Inde je $V(x) = 0$.
(iv) $V(x) = +V_0$, pre $x \in \langle 0,\,\infty\rangle$. Inde je $V(x) = 0$. **[2 body]**

3. *po častiach konštantný potenciál*
Uvažujte potenciál $V(x) = 0$ na intervale $(-a,\,a)$ a pre $|x| > b$, kde $0 < a < b$. Na intervale $(-b,\,-a)$ je $V(x) = +V_0$ a na intervale $(a,\,b)$ je $V(x) = -V_0$, kde $V_0 > 0$. Bez toho, aby ste našli presné riešenie bezčasovej SchR odpovedzte na nasledujúce otázky.

(a) Určte, z akého intervalu môžu byť energie častice v tomto potenciáli.

(b) Môže mať častica v tomto potenciáli viazaný stav? Z akého intervalu je vtedy jej energia?
A môže mať rozptylový stav? Ak áno, čo sa dá vtedy povedať o jej energii?

(c) Nech sú parametre jamy také, že existuje stacionárny stav s energiou
(i): $E = V_0/2$,
(ii): $E = -V_0/2$. Načrtnite odpovedajúcu vlastnú funkciu hamiltoniánu, t.j. vlnovú funkciu častice s touto energiou (jej reálnu časť) pre zafixovaný čas, napr. $t = 0$.

Dajte si záležať na správnej vlnovej dĺžke funkcií vo Vášom náčrtku a na správnej amplitúde, ak budú vo Vašom obrázku viaceré harmonické funkcie. **[2 body]**

4. *viazané stavy v konečnej konštantnej potenciálovej jame*
Určte, z akého intervalu je hĺbka jamy, ktorá bude mať presne štyri viazané stavy. Ktoré z nich budú s párnou a ktoré s nepárnou vlnovou funkciou?
Načrtnite priebeh všetkých týchto štyroch vlnových funkcií.
Z grafického riešenia čo najpresnejšie špecifikujte intervaly, v ktorých sa nachádzajú energie odpovedajúce uvažovným viazaným stavom.

Čo sa dá odpovedať na otázku, či sú tieto vlnové funkcie navzájom ortogonálne, ak by ste mali svoju odpoveď aj dokázať? **[2 body]**

5. *presné riešenie pre konečnú konštantnú jamu*
Akej hĺbky je jama s viazaným stavom s $E = -V_0/2$? *Úloha má veľa riešení.*

Môže to byť stav odpovedajúci jedinému viazanému stavu sústavy?

Môže to byť stav odpovedajúci nepárnemu riešeniu? **[2 body]**

6. *viazané stavy v konečnej jame v jednom rozmere*
Uvažujme elektrón v konečnej jame šírky 10^{-10}m. Koľko viazaných stavov má tento elektrón, ak je hĺbka jamy *(i)* $1\,\mathrm{eV}$, *(ii)* $10\,\mathrm{eV}$? **[2 body]**

7.= A2. Zbierka str.47, tlač. verzia a str.34 v pdf. *JHO, kvantový vs. klasický popis*
Jednoduchý harmonický oscilátor (JHO), v Zelenej učebnici označovaný ako "Lineárny harmonický oscilátor", je v základnom stave popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x) = A\,e^{-x^2/2x_Q^2}$, kde konštanta $x_Q = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ je typický rozmer tejto kvantovej sústavy a A je normovacia konštanta. Jeho energia je $\hbar\omega/2$.

Vypočítajte normovaciu konštantu A. *Pomocný integrál:* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

S akou pravdepodobnosťou bude v tomto stave výchylka oscilátora z rovnovážnej polohy väčšia ako amplitúda klasického oscilátora s rovnakou energiou?
Pri numerickom odhade využite vzťah

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-t^2}\, dt = 0.0787\,.$$

(V tlačenej Zbierke je tento pomocný integrál uvedený chybne. Na internete by už mal byť správne.) **[2 body]**

8. (bonus príklad) *operátor v exponente*

Operátor $\hat{O} = e^{\hat{A}}$ definujeme cez Taylorov rozvoj exponenciály.

Ukážte, že operátor $\hat{T}_a = e^{i\hat{p}a/\hbar}$ je operátorom posunutia (translácie), ktorý $\Psi(x)$ zobrazí na $\Psi(x+a)$. **[2 body]**

9. (bonus príklad) *operátor v exponente*
Určte 2x2 maticu, ktorá odpovedá operátoru

$$\hat{R}_x(\frac{\pi}{2}) = e^{-i\frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}. \tag{1}$$

Neskôr sa dozvieme, že je to operátor rotácie spinu okolo osi x o uhol $\frac{\pi}{2}$. Tu je to zatiaľ iba úprava matíc a poučenie, že má zmysel uvažovať v exponente aj maticu. **[2 body]**