

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.7

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 21.11.2025

1. meranie v kvantovej mechanike

(a) Uvažujme stav voľnej častice v jednom rozmere popísaný vlnovou funkciou normovanou na konečný interval

$$\Psi(x) = \frac{1}{4} \frac{e^{-iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1}{4} \frac{e^{+iqx/\hbar}}{\sqrt{L}} + \frac{1}{2} \frac{e^{+2iqx/\hbar}}{\sqrt{L}}.$$

Overte, či je táto vlnová funkcia správne normovaná a ak nie je, opravte ju tak, aby bolo jej normovanie v poriadku a pravdepodobnosti merať prvé dve hybnosti boli rovnaké, a zvyšná pravdepodobnosť dvakrát väčšia.

Aké energie a s akou pravdepodobnosťou nameriame tejto častici v stave Ψ ?

V akom stave je častica, pôvodne v stave Ψ , po tom, čo jej odmeriame väčšiu (najväčšiu) z možných energií? Napíšte vlnovú funkciu tohto stavu.

V akom stave je častica, pôvodne v stave Ψ , po tom, čo jej odmeriame menšiu (najmenšiu) z možných energií? Napíšte vlnovú funkciu tohto stavu.

(b) Uvažujme stav JHO popísaný vlnovou funkciou

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2} \Psi_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1(x) + \frac{1}{2} \Psi_2(x),$$

kde $\Psi_n(x)$ sú vlnové funkcie stacionárnych stavov. Predstavme si pre účely tohto príkladu, že by existoval jednoduchý prístroj na meranie parity kvantového JHO. Akú paritu a s akými pravdepodobnosťami by prístroj nameral tomuto JHO?

V akom stave je JHO, pôvodne v stave $\tilde{\Psi}$, po tom, čo mu odmeriame menšiu (najmenšiu) z možných parít? Napíšte vlnovú funkciu tohto stavu.

V akom stave je JHO, pôvodne v stave $\tilde{\Psi}$, po tom, čo mu odmeriame väčšiu (najväčšiu) z možných parít? Napíšte vlnovú funkciu tohto stavu.

Svoje odpovede zdôvodnite, resp. okomentujte.

[4 body]

2. Schwarzova nerovnosť pre vlnové funkcie

Pri dôkaze vzťahu neurčitosti sme vychádzali zo Schwarzovej nerovnosti, ktorej dôkaz sme ponechali na neskôr, tak ho urobíme/urobíte tu. Tvrdenie je: pre každé dve kvadraticky integrovateľné komplexné funkcie $f(x)$ a $g(x)$ na reálnej osi platí nerovnosť $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \geq |\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g(x) dx|^2$.

Pomôcka k dôkazu: Výjde sa zo zjavne pravdivého tvrdenia, že pre každé dve kvadraticky integrovateľné komplexné funkcie $f(x)$ a $g(x)$ na reálnej osi a pre každé komplexné číslo λ platí nerovnosť $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + \lambda g(x)|^2 dx \geq 0$. Prvý krok je ukázať, že pre funkciu $g(x) = 0$ pre každé x , Schwarzova nerovnosť platí. Potom roznásobte $|f + \lambda g|^2$ a zvolte $\lambda = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x) dx / \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx$.

[2 body]

3. dôvod na useknutie radu

Pri riešení $\hat{H}\Psi = E\Psi$ pre JHO sme sa dostali k parametrizácii $\Psi(\xi) = \sum_0^\infty a_k \xi^k e^{-\xi^2/2}$, s rekurentným vzťahom $a_{k+2} = \dots a_k$ pre koeficienty radu. Povedali sme, že rad treba useknúť, lebo pre veľké k sa ide podobať na rad pre e^{ξ^2} , takže $\Psi(\xi)$ by bola ako $e^{+\xi^2/2}$ a prestala byť kvadraticky integrovateľná. Ukážte, že bez useknutia sa mocninný rad vo vlnovej funkcii naozaj správa ako funkcia $e^{+\xi^2}$.

Pomôcka: Uvažujme rad v $\Psi(\xi)$ a zohľadnime, že každý druhý člen je nula, nakoľko buď $a_0 = 0$ alebo $a_1 = 0$. Potom pri rozpísaní radu dostávame dva susedné nenulové členy $\dots + a_k \xi^k + a_{k+2} \xi^{k+2} + \dots$.

Pre funkciu e^{ξ^2} analogicky dostávame $\dots + \frac{1}{k!} \xi^{2k} + \frac{1}{(k+2)!} \xi^{2k+2} + \dots$. Požadované porovnanie ešte nemôžeme urobiť, lebo tu sú iné mocniny ξ . Aby boli rovnaké, uvažujme párne k a substitúciu $k_{NEW} = 2k$. Teraz už môžeme porovnať pomery koeficientov pri susedných mocninách ξ^{k+2} a ξ^k v limite veľkého k . Naozaj Vám vychádzajú tieto pomery rovnaké? **[2 body]**

4. stacionárne stavy JHO

(a) Na cviku ste mali možnosť odvodiť vlnové funkcie niekoľkých stacionárnych stavov. Ak ste nestihli odvodiť $\Psi_4(x)$, odvoďte ju tu.

(b) Porovnajte, či Vám vychádza rovnaký polynóm (až na konštantu) ako Hermitov polynóm $H_4(x)$ v Zelenej učebnici v Dodatku A2.

(c) Načrtnite $\Psi_4(x)$ a hustotu pravdepodobnosti výskytu $|\Psi_4(x)|^2$.

(d) Určte, či je stredný hrb v $|\Psi_4(x)|^2$ väčší alebo menší ako krajné hrby.

(e) Zistenie o hrbe zovšeobecnite pre náčrty $|\Psi_6(x)|^2$ a $|\Psi_8(x)|^2$, vlnové funkcie nemusíte odvodzovať.

(f) Nakoniec zistenie o hrbe zovšeobecnite pre náčrtok $|\Psi_N(x)|^2$, kde $N \gg 1$.

[2 body]

5. ortogonalita vlnových funkcií stacionárnych stavov JHO

Na cviku ste mali možnosť odvodiť vlnové funkcie niekoľkých stacionárnych stavov. Ak ste nestihli odvodiť $\Psi_n(x)$ potrebné pre tento príklad, odvoďte ich tu.

Pomocou známych $\Psi_n(x)$ ukážte priamym výpočtom ortogonalitu dvojice $\Psi_3(x)$ a $\Psi_1(x)$, ako aj dvojice $\Psi_4(x)$ a $\Psi_0(x)$.

Poznámka: zjavne pre párny a nepárny stacionárny stav sú vlnové funkcie ortogonálne, tento dôkaz by bol triviálny: potrebný integrál je rovný nule, lebo v tomto prípade sa integruje nepárna funkcia na celej reálnej osi.

Pomocné integrály: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, atď. **[2 body]**

6. vzťah neurčitosti pre základný stav JHO

Uvažujme JHO v základnom stave. Vypočítajte stredné kvadratické odchýlky Δx a

Δp v tomto stave a overte, že je splnený vzťah neurčitosti.

[2 body]

7. predpoveď pre meranie hybnosti v základnom stave JHO

(a) Uvažujme JHO v základnom stave. Vypočítajte hustotu pravdepodobnosti namaerať oscilátoru v tomto stave hybnosť p . Overte, že je správne normovaná.

(b) Určte (a zdôvodnite) z hustoty pravdepodobnosti merania p získanej v časti (a) strednú kvadratickú odchýlku Δp a okomentjte, či dostávate zhodu s Δp z riešenia príkladu 6.

[2 body]

8. rádový odhad energie základného stavu JHO

Ak by sme nemali SchR a jej riešenie, minimálnu energiu JHO by sme odhadovali rádovo podobne, ako sme celkom na začiatku odhadovali rádovo energiu elektrónu v atóme vodíka. Zopakujte toto odvodenie, tentokrát sme v jednom rozmere. T.j. minimalizujte energiu častice s potenciálnou energiou JHO a za predpokladu, že možno z princípu neurčitosti odhadnúť $p \approx \hbar/x$. Porovnajte rádový odhad, čiže Váš výsledok, s energiou E_0 z presného riešenia SchR.

[2 body]

9. bonus príklad: predpoveď pre meranie hybnosti v prvom excitovanom stave JHO

Ako v príklade 7. (a), len pre prvý excitovaný stav.

Uvažujme JHO v prvom excitovanom stave. Vypočítajte hustotu pravdepodobnosti namaerať oscilátoru v tomto stave hybnosť p . Overte, že je správne normovaná.

[2 body]