

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.8

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 2.12.2025

1. kmity JHO v nestacionárnom stave

V tomto príklade uvažujme len reprezentáciu vlnovými funkciami. Príklad má dlhé zadanie, ale krátke riešenie (odpovede).

(a) Napíšte správne normovanú vlnovú funkciu základného stavu $\Psi_0(x)$ a prvého excitovaného stavu $\Psi_1(x)$.

Môžete ich opísať z minulosti, ale potrebujeme ich teraz aj so správnym normovaním.

(b) Graficky načrtnite, ako tieto vlnové funkcie vyzerajú a tiež hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v spomínaných dvoch stavoch.

(c) Aká je podľa náčrtku stredná hodnota merania polohy oscilátora v stave Ψ_0 a aká v stave Ψ_1 ? Odpoveď zdôvodnite.

Tieto stredné hodnoty označme ako maticové elementy x_{00} a x_{11} .

(d) Ψ_0 , Ψ_1 , x_{00} a x_{11} z odpovedí na otázky (a) a (c) môžeme chápať ako $\Psi_0(x, t)$, $\Psi_1(x, t)$, $x_{00}(t)$ a $x_{11}(t)$ v čase $t = 0$.

Aký je ich časový vývoj pre $t > 0$?

Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v spomínaných dvoch stavoch v nejakom zvolenom neskoršom čase.

Dochádza v stavoch Ψ_0 a Ψ_1 ku kmitom strednej polohy oscilátora? Dá sa vaše pozorovanie zovšeobecniť na všetky stacionárne stavy?

(e) Nech je JHO v čase $t = 0$ v stave, ktorý je superpozíciou vlastných stavov Ψ_0 a Ψ_1 , s rovnakou pravdepodobnosťou $P(E_0) = P(E_1)$ pri meraní energie, a s nulovou relatívnou fázou v superpozícii. Napíšte správne normovanú vlnovú funkciu oscilátora v čase $t = 0$. *Pre väčšiu prehľadnosť a vyniknutie pointy, ktorú sledujeme v tomto príklade, nedosadzujte konkrétne výrazy za Ψ_0 a Ψ_1 z časti (a).*

Graficky načrtnite, ako približne táto vlnová funkcia vyzerá a tiež hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v tomto stave.

Je $\bar{x}$ vychýlená mimo počiatku? Na ktorú stranu?

(f) Napíšte, ako sa vlnová funkcia oscilátora z časti (e) vyvíja v čase $t > 0$ (naďalej nedosadzujte za Ψ_0 a Ψ_1 , za energie však dosadzte príslušný násobok $\hbar\omega$), a ...

(g) ... načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu oscilátora na reálnej osi v časoch $t = \pi/\omega$ a $t = 2\pi/\omega$.

Je pre tieto časy $\bar{x}$ vychýlená mimo počiatku? Na ktorú stranu?

(h) Vypočítajte strednú polohu $\overline{x(t)}$ oscilátora z časti (f) pomocou nenulového maticového elementu x_{01} ako funkciu času. Explicitne dokážte, že $\overline{x(t)}$ koná harmonické kmity okolo počiatku s kruhovou frekvenciou ω .

Nakoniec určte x_{01} a z neho určte amplitúdu kmitov JHO v tomto stave.

(i) Dostávate zhodu s Ehrenfestovými vetami pre JHO?

Dostávate ekvivalentnú informáciu alebo ste tu odvodili aj niečo navyše, čo nemožno odvodiť z Ehrenfestových viet?

(j) Ako kmitá stredná poloha $\overline{x(t)}$ oscilátora, ktorý je namiesto superpozície základného a prvého excitovaného stavu (viď otázka (h)) v stave danom superpozíciou základného a n -tého excitovaného stavu, $n \geq 2$?

Svoju odpoveď zdôvodnite. Naozaj počítať tu však netreba nič.

[4 body]

2. JHO v energetickej reprezentácii

(a) Odvoďte alebo iba napíšte matice x a p .

(b) Vychádzajúc z týchto matíc odvoďte tvar matice $p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$ a okomentujte výsledok. Pozrite pritom na tvrdenie v bonusovom príklade 8.

[2 body]

3. JHO v energetickej reprezentácii

Vychádzajúc zo známych matíc x a p vypočítajte maticu $[x, p]$, ktorá je komutátorom týchto dvoch matíc. Viete vopred, čo má výjsť?

[2 body]

4. JHO: znižovací operátor v reprezentácii vlnovými funkciami

(a) V reprezentácii vlnovými funkciami ukážte, že znižovací operátor naozaj anihuje základný stav JHO do nuly (ničoty). T.j. vypočítajte $\hat{a}\Psi_0(x)$, kde $\Psi_0(x) = 1/\sqrt{\sqrt{\pi}x_Q} e^{-x^2/2x_Q^2}$, a $\hat{a} = (\frac{x}{x_Q} + i\frac{\hat{p}}{p_Q})/\sqrt{2}$, s operátorom $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$. Typická hybnosť je $p_Q = \sqrt{\hbar m\omega}$.

(b) Napíšte, ako je znižovanie v časti (a) reprezentované v energetickej reprezentácii.

[2 body]

5. JHO: zvyšovací operátor v reprezentácii vlnovými funkciami

(a) Podobne ako v príklade 4. v reprezentácii vlnovými funkciami ukážte, že zvyšovací operátor pôsobiaci na základný stav JHO naozaj dáva prvý excitovaný stav. T.j. vypočítajte $\hat{a}^\dagger\Psi_0(x)$. Mala by vyjsť vlnová funkcia prvého excitovaného stavu a_j so správnym normovaním. Overte.

(b) Napíšte, ako je zvyšovanie v časti (a) reprezentované v energetickej reprezentácii.

[2 body]

6. JHO: časový vývoj v energetickej reprezentácii

V čase $t \geq 0$ uvažujme stav $\Psi(t)$ reprezentovaný stojacim vektorom s komponentami $c_n(t)$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Aká diferenciálna rovnica platí pre koeficienty $c_n(t)$, ak pre $\Psi(t)$ platí časová SchR?

Aké je jej riešenie pre $c_n(t)$ s počiatočnou podmienkou $c_n(0) = b_n$?

Konkretizujme to: v energetickej reprezentácii určte $\Phi(t)$, ak v čase nula je tento stav rovný $|\Phi\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|6\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|7\rangle$.

V energetickej reprezentácii vypočítajte $\overline{x(t)}$, t.j. kmity strednej polohy oscilátora,

ktorý je v stave $\Phi(t)$. Sú tieto kmity harmonické, v zhode s Ehrenfestovými vetami?
[2 body]

7. kmity $\bar{x}(t)$ pre JHO v stave danom nekonečnou superpozíciou

Uvažujme JHO, ktorý je v čase $t = 0$ v stave $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} |n\rangle$.

(a) Overte, že stav $|\Psi\rangle$ je správne normovaný.

(b) Určte $|\Psi(t)\rangle$ v čase $t > 0$.

(c) Vypočítajte $\bar{x}(t)$.

Pomôcka: Zamyslite sa, či pri výpočte bude vhodná niektorá z reprezentácií JHO alebo postup vo všeobecnom formalizme. Mohlo by byť užitočné vyjadriť operátor $\hat{x}$ pomocou $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$, pričom $\hat{a}|n\rangle = C_-|n-1\rangle$ a $\langle n|\hat{a}^\dagger = (\hat{a}|n\rangle)^\dagger = C_-^* \langle n-1|$. Čomu je rovné C_- ? Časový vývoj nekonečnej superpozície je ako pre konečnú v príklade 6.

(d) Dostali ste nenulové harmonické kmity $\bar{x}(t)$?

Áké sú ich perióda, frekvencia a amplitúda?

Čomu je rovné $\bar{x}(t)$ v časoch 0, $T/4$, $T/2$, $3T/4$ a T , kde T je perióda?

Ak vyšlo $\bar{x}(t=0)$ mimo počiatku, ako zadať taký stav JHO, pre ktorý bude $\bar{x}(t=0)$ s opačným znamienkom?

(e) Táto podotázka mi príde najzaujímavejšia. Dostali sme informáciu o kmitoch strednej polohy JHO. Nevieme však, čo sa s ním deje v priestore, ak ho vnímame ako balík. Rozplýva sa v čase, ako to bolo u voľnej častice? Odpoveď získame, keď pre uvedený stav JHO vypočítame strednú kvadratickú odchýlku $\Delta x(t)$. Urobte tento výpočet. Porovnajte výsledok s Δx pre JHO v základnom stave.
[4 body]

8. (bonus príklad) energetická reprezentácia a násobenie operátorov

Dokážte pomocné tvrdenie: súčin operátorov $\hat{A}\hat{B}$ odpovedá v energetickej reprezentácii súčin matíc AB .

Nie je to samozrejmé. My sme to už bez dôkazu použili, napr. pri výpočte matice H z rovnosti operátorov $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2})$.

Pomôcka: Začneme zo správneho, dobre známeho násobenia matíc $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = \sum_k \langle i|\hat{A}|k\rangle \langle k|\hat{B}|j\rangle = \langle i|\hat{A}(\sum_k |k\rangle \langle k|)\hat{B}|j\rangle$, kde stavy $|i\rangle$ sú stacionárne stavy, t.j. vlastné stavy hermitovského $\hat{H}$. Ony tvoria bázu v energetickej reprezentácii.

Zo vzťahu úplnosti potom dokážte, že suma $\sum_k$ dáva jednotku, resp. jednotkový operátor. Keďže jednotkový operátor netreba písať, dostávame dokazované tvrdenie.

[2 body]