

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.9

riešenia, prosím, odovzdajte do poludnia (12:00hod) v pondelok 8.12.2025

1. Legendrove polynómy

(a) Odkiaľ vieme, že Legendrove polynómy sú buď párne alebo nepárne?

(b) Na základe (a) a vlastnosti $P_\ell(1) = 1$ pre každé ℓ , čo možno bez počítania vo všeobecnosti povedať o hodnotách $P_\ell(0)$ a o hodnotách $P_\ell(-1)$?

(c) Na prednáške sme odvodili prvé tri Legendrove polynómy. Ktoré guľové funkcie nám priamo (až na konštantu) udávajú tieto tri polynómy? Doplňte správne normovanie u napísaných guľových funkcií. Aký moment hybnosti L^2 a L_z má častica v stave s jednou z týchto guľových funkcií? **[2 body]**

2. Legendrove pridružené funkcie a guľové funkcie

Zo známeho $P_2(t)$ určte pridruženú Legendrovu funkciu $P_2^1(t)$ a z nej $Y_{21}(\theta, \varphi)$ a $Y_{2-1}(\theta, \varphi)$, až na normováciu konštantu. Podobne určte $Y_{2\pm 2}(\theta, \varphi)$. *Pomôcka: vo všeobecnosti platí $Y_{\ell-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi)$.*

Vyznačte na povrchu jednotkovej gule oblasti, kde sú najpravdepodobnejšie smery výskytu častice v stave, ktorého vlnová funkcia má závislosť na uhloch

(i) $Y_{20}(\theta, \varphi)$,

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{21}(\theta, \varphi) + Y_{2-1}(\theta, \varphi)]$,

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{21}(\theta, \varphi) - Y_{2-1}(\theta, \varphi)]$,

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{22}(\theta, \varphi) + Y_{2-2}(\theta, \varphi)]$,

(v) $\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{22}(\theta, \varphi) - Y_{2-2}(\theta, \varphi)]$. **[3 body]**

3. vyššie Legendrove polynómy a guľové funkcie

(a) Z rekurentného vzťahu odvodeného na prednáške určte $P_3(t)$ a $P_4(t)$.

(b) Overte, že $P_4(t)$ je ortogonálny na $P_0(t)$ aj na $P_2(t)$.

(c) Ktoré z funkcií $Y_{4m}(\theta, \varphi)$ pripúšťajú výskyt častice na osi z ? Ak by bolo známe, že celkový moment hybnosti častice je $L^2 = 20\hbar^2$ a potom je poloha častice zistená niekde na osi z , aké bolo kvantové číslo m pred meraním polohy? **[3 body]**

4. meranie momentu hybnosti

Uvažujme časticu v stave popísanom separabilnou vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}) = R(r) f(\theta, \varphi)$.

S akou pravdepodobnosťou aké hodnoty L^2 a L_z nameriame častici, pre ktorú

$$f(\theta, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{14}} Y_{32}(\theta, \varphi) + \frac{2-i}{\sqrt{14}} Y_{33}(\theta, \varphi) - \frac{1+i}{\sqrt{14}} Y_{52}(\theta, \varphi) + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{14}} Y_{53}(\theta, \varphi) ?$$

Ak by šlo o viazaný stav elektrónu v atóme vodíka a v experimente by sa išla merať energia tohto elektrónu (predpokladajúc, že máme taký merací prístroj a že máme veľký počet takto pripravených elektrónov), čo môžeme predpovedať pre hodnotu

najmenšej nameranej energie elektrónu? Môžeme analogicky predpovedať aj aká bude najväčšia nameraná energia? **[3 body]**

5. meranie momentu hybnosti

Čo možno predpovedať o výsledku merania L^2 a L_z častice popísanej vlnovou funkciou s uhlovou závislosťou

(a) $f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta + \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \right),$

(b) $f(\theta, \varphi) = \sqrt{3} \cos \theta + 1,$

(c) $f(\theta, \varphi) = \cos \theta + 1,$

(d) $f(\theta, \varphi) = 3 \cos \theta + 4?$

Pokaždé uveďte nielen merané hodnoty, ale aj pravdepodobnosť, s akou budú merané. **[2 body]**

6. moment hybnosti

Vypočítajte, s akou pravdepodobnosťou nameriame nulový moment hybnosti častici, ktorej uhlová časť vlnovej funkcie je úmerná $\sin \theta$ (a žiadna závislosť na φ).

Pomôcka: Výsledok je $3\pi^2/32 = 0.925$, zarážajúco veľká hodnota, keďže funkcia $\sin \theta$ sa intuitívne nepodobá na konštantu. Avšak dostaneme ho len vtedy, ak na začiatku správne normujeme zadanú funkciu $\sin \theta$ v celom priestorovom uhle. **[2 body]**

7. Legendrove polynómy a guľové funkcie

Guľové funkcie odpovedajúce rôznym kvantovým číslam sú na seba ortogonálne. To, že sú priamo úmerné Legendrovým polynómom, resp. pridruženým funkciám, je nám teraz už dobre známe. Je pridružená Legendrova funkcia $P_1^1(\cos \theta)$ ortogonálna na Legendrov polynóm $P_2(\cos \theta)$? Ak Vám vyšlo, že nie je, ako to, že od Y_{11} a Y_{20} očakávame, že sú ortogonálne? Ak Vám vyšlo, že $P_1^1(\cos \theta)$ a Legendrov polynóm $P_2(\cos \theta)$ sú ortogonálne, tak ste sa, žiaľ pomýlili. **[2 body]**

8. degenerácia stacionárnych stavov elektrónu v atóme vodíka

Stacionárne stavy elektrónu v atóme vodíka sú popísané vlnovou funkciou $\Psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r)Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$. Každý elektrón má navyše spin, ktorému odpovedajú dve možnosti priemetu na os z : $s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$.

(a) Aké hodnoty nadobúdajú kvantové čísla n, ℓ, m ?

(b) Koľkokrát je degenerovaná základná hladina pre elektrón v atóme vodíka so zarátaním spinu?

(c) Koľkokrát je degenerovaná prvá excitovaná hladina?

(d) Koľkokrát je degenerovaná druhá excitovaná hladina?

(e) Odpovede zovšeobecnite pre degeneráciu n -tej excitovanej hladiny so zarátaním spinu. Sedí vaša odpoveď s výsledkami vyššie pre $n = 1, n = 2$ a $n = 3$? **[2 body]**

9. BONUS príklad - moment hybnosti

Čo možno predpovedať o výsledku merania L^2 a L_z častice popísanej vlnovou funkciou s uhlovou závislosťou $f(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta + \cos \theta + 1$? **[2 body]**