

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.11

riešenia, prosím, odovzdajte do poludnia 12:00h v utorok 23.12.2025

1. Pauliho matice

Pokúste sa spamäti napísať všetky tri Pauliho matice. Po ich napísaní zodpovedajte nasledujúce otázky.

(a) Vypočítajte druhú mocninu každej Pauliho matice.

(b) Na základe výsledku v (a) určte, čomu je rovná matica $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$. Porovnajete výsledok s výsledkom pre kvadrát orbitálneho momentu hybnosti L^2 , resp. jeho vlastnou hodnotou. **[2 body]**

2. vlastné vektory matice $S_{\vec{n}}$

(a) Na prednáške sme odvodili tvar matice $S_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{S}$ a bez odvodu sme napísali jej vlastné vektory. Dokážte priamym dosadením, že $\Psi_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$ je jej vlastný vektor odpovedajúci spinorovému stavu elektrónu vychádzajúcemu z prístroja SG $_{\vec{n}}$ so spinom hore. Voči ktorému smeru je to spin hore?

(b) Rovnako dokážte priamym dosadením, že $\Psi_2 = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ -\cos(\theta/2) e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$ je jej vlastný vektor odpovedajúci spinorovému stavu elektrónu vychádzajúcemu z prístroja SG $_{\vec{n}}$ so spinom dolu.

(c) Určte, či sú tieto spinory správne normované.

(d) Určte, či sú tieto spinory na seba ortogonálne. **[2 body]**

3. vlastné vektory matice $S_{\vec{n}}$

(a) Ak máte správne napísanú maticu $S_{\vec{n}}$, mali by ste z nej odvodiť S_z (a aj jej už známe vlastné vektory, až na nefyzikálnu celkovú fázu) pre smer $\vec{n}$ rovný jednotkovému vektoru v kladnom smere osi z . Je tomu tak?

(b) Rovnako by ste mali z matice $S_{\vec{n}}$ odvodiť S_x pre smer $\vec{n}$ rovný jednotkovému vektoru v kladnom smere osi x . Je tomu tak? Overte aj jej vlastné vektory, ktoré odvodíte zo spinorov v otázkach 2.(a) a 2.(b) vyššie.

(c) Podobne odvoďte z tvaru $S_{\vec{n}}$ maticu S_y a z tvaru vlastných vektorov matice $S_{\vec{n}}$ spinory odpovedajúce spinom hore a dolu voči osi y .

(d) Na záver uvažujte jednotkový vektor $-\vec{n}$. Možno ho dostať konverziou $\theta \rightarrow \pi - \theta$ a $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$. Napíšte maticu $S_{-\vec{n}}$ a zo spinorov v otázkach 2.(a) a 2.(b) nájdite jej vlastné vektory. Okomentujte, či Váš výsledok dáva zmysel. **[2 body]**

4. štiepenie zväzku SG prístrojom

Elektróny v spinovom stave popísanom spinorom $\Psi = A \begin{pmatrix} i \\ 5 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia

konštantu, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi $\vec{n}$. Aké hodnoty hodnoty $S_{\vec{n}}$ nameriame prístrojom a s akými pravdepodobnosťami?

Na základe známych pravdepodobností vypočítajte strednú hodnotu $\overline{S_{\vec{n}}}$.

Overte, že tú istú strednú hodnotu $\overline{S_{\vec{n}}}$ dostávate aj pri počítaní výrazu $\Psi^\dagger S_{\vec{n}} \Psi$.

Na cviku ste tento istý zväzok štiepili prístrojmi SG_x , SG_y aj SG_z . Overte, že dostávate rovnaké výsledky z prvej časti tejto úlohy pre špeciálne výbery osi $\vec{n}$. **[3 body]**

5. štiepenie zväzku dvomi SG prístrojmi

Zväzok elektrónov v spinovom stave danom spinorom $\Psi = A \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ prechádza prístrojom SG_x . Elektróny, ktoré vychádzajú so spinom nahor voči osi x necháme prejsť prístrojom $SG_{\vec{n}}$, kde $\vec{n}$ je daný uhlami $\theta = \pi/2$ a $\varphi = \pi/4$. Aký je pomer intenzity zväzku so spinom hore v smere $\vec{n}$ voči intenzite pôvodného zväzku? **[2 body]**

6. štiepenie zväzku dvomi SG prístrojmi

Uvažujme zväzok elektrónov, ktorý vyšiel z $SG_{\vec{n}}$ so spinom hore a prechádza prístrojom $SG_{\vec{n}'}$. Dokážte, že pravdepodobnosť namerať spin hore v smere $\vec{n}'$ je rovná $P = \frac{1}{2}(1 + \vec{n} \cdot \vec{n}')$. **[3 body]**