

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.12

riešenia, prosím, odovzdajte do večera (polnoci) 05.01.2026

1. bónus príklad: poruchová teória pre nedeg. prípad - nabitý JHO v $\vec{E}_{ext}$

Na poslednom cviku 12 ste sa okrem iného venovali nabitému JHO (s nábojom Q) v homogénnom vonkajšom elektrickom poli $\vec{E}_{ext}$ v smere kmitov JHO. (Myslíme kmity strednej hodnoty polohy, štandardne smer osi x .)

Na prednáške sme ukázali, že v prvom ráde vychádza korekcia k energii ľubovolnej hladiny rovná nule, čo nás motivuje k výpočtu korekcie v druhom ráde poruchovej teórie. Na cviku bol potom predvedený výpočet $E_n^{(2)}$. Výsledné posunutie hladín bolo nenulové, avšak rovnaké pre všetky hladiny. To znamená, že ani pomocou druhého rádu poruchovej teórie nevieme, ako - a či vôbec - sa zmení emisné spektrum sústavy takýchto oscilátorov.

V tomto príklade vypočítajte presné posunutie n -tej hladiny do všetkých rádoov poruchovej teórie a porovnajte ho s výsledkom z cvika 12.

Návod: Uvažujte potenciál celkového hamiltoniánu pri zapnutom $\vec{E}_{ext}$. Obsahuje kvadratický člen x^2 pochádzajúci z $\hat{H}_0$ a lineárny člen x z $\hat{H}'$. Z týchto dvoch členov výjmite pred zátvorku $\frac{1}{2}m\omega^2$ a do zátvorky pridajte takú konštantu, ktorá doplní členy s x^2 a x na úplný štvorec v premennej x_{NEW} , kde x_{NEW} je súradnica x posunutá o konštantu. Konštantu, ktorú ste pritom pridali do potenciálu, a tým pádom aj do hamiltoniánu, treba naspäť odčítať. Toto odčítanie konštanty predstavuje rovnaké posunutie každej hladiny a je to presne rovné $E_n^{(2)}$ z cvika. Keďže diferenciál dx je rovnaký ako dx_{NEW} , časť hamiltoniánu odpovedajúca kinetickej energii sa nezmení. $\hat{H}$ sme iba prepísali pomocou lineárnej substitúcie $x \rightarrow x_{NEW}$. Vašou úlohou je odvodiť to konštantné posunutie hladín a porovnať s poruchovým výsledkom z cvika.

Poznámka: V druhom ráde poruchovej teórie výjde presný výsledok preto, lebo presný výsledok je - ako ste práve ukázali v tomto príklade - kvadratický v poruche, teda úmerný $(QE_{ext})^2$. A n -tý rád poruchovej teórie je vždy úmerný poruche umocnenej na n -tú. Teda z vyšších rádoov poruchovej teórie už nemôže prísť posunutie hladín, ktoré by bolo iba kvadratické v poruche.

[2 body]

2. bónus príklad: elektrón v atóme H , vo vonkajšom elektr. poli

Tento príklad sa rieši podobne ako **A1.** a **A3.** v 6.kapitole Zbierky úloh z kvantovej mechaniky (žltá kniha, link je na stránke kurzu).

Atóm vodíka v základnom stave umiestnime do konštantného vonkajšieho elektrického poľa $\vec{E}_{ext}$ v smere osi z .

(a) Napíšte poruchový hamiltonián odpovedajúci pôsobeniu poľa na elektrón¹ a určte korekciu k energii základného stavu elektrónu v prvom ráde poruchovej teórie.

(b) Uvažujme elektrón v prvom excitovanom stave, ktorý je pred zapnutím poruchy s energiou E_2 v stave s kvantovými číslami $n\ell m = 200$.

Keby sa po zapnutí poruchy rovnakým spôsobom počítala korekcia k energii tohto stavu, odkiaľ vidno, že tentoraz by bol výsledok nedôveryhodný (a v letnom semestri uvidíme, že aj nesprávny)?

Poznámka: Odpoveď bola priamo zodpovedaná na prednáške. **[2 body]**

3. bónus príklad: poruchová teória pre nedegenerovaný prípad

Uvažujme časticu viazanú v konštantnej potenciálovej jame konečnej hĺbky V_0 a dĺžky $2a$.

Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie nulová. Svoju odpoveď zdôvodnite. **[2 body]**

4. bónus príklad: poruchová teória pre nedegenerovaný prípad

Uvažujme časticu viazanú v konštantnej potenciálovej jame dĺžky $2a$ a takej konečnej hĺbky V_0 , že častica má aspoň dva viazané stavy.

Graficky navrhnete tvar dodatočného (poruchového) hamiltoniánu pôsobiaceho na túto časticu, aby bola korekcia k energii základného stavu v prvom ráde poruchovej teórie väčšia ako korekcia k energii prvého excitovaného stavu. Svoju odpoveď zdôvodnite. **[2 body]**

5. bónus príklad: poruchová teória pre nedegenerovaný prípad

Uvažujme JHO, na ktorý pôsobí poruchový hamiltonián tvaru $H' = V_0 e^{-x^2/2(\kappa x_Q)^2}$, kde $0 < V_0 \ll \hbar\omega$ je konštanta s rozmerom energie, $x_Q = \sqrt{\hbar/m\omega}$ je typická vzdialenosť pre kvantový JHO a κ je bezrozmerný parameter, pričom κx_Q

¹Vzťah medzi elektrostatickým potenciálom ϕ a intenzitou elektrického poľa $\vec{E}$ je $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

je gaussovská šírka poruchy. κ určuje šírku poruchy (výška V_0 je nezávislá od κ). Pre $0 < \kappa \ll 1$ je porucha úzky hrbček na dne potenciálu JHO, zatiaľ čo pre $\kappa \gg 1$ je porucha široká a o málo nadvihuje celé dno potenciálu. Môžete prípadne načrtnúť tieto dva limitné prípady.

Na prednáške sme v našom treťom príklade riešili posunutie prvých dvoch hladín JHO pre $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$, v prvom ráde poruchovej teórie. Tomu odpovedá porucha, ktorá nie je ani veľmi široká, ani úzky hrbček. Dostali sme posunutia $E_0^{(1)} = V_0/\sqrt{2}$ a $E_1^{(1)} = E_0^{(1)}/2$. Povedali sme, že je rozumné očakávať, že pre maličké κ sa pomer medzi $E_1^{(1)}$ a $E_0^{(1)}$ podstatne zmenší. Na základe čoho to očakávame?

Spočítajte obe uvedené korekcie pre ľubovoľné κ a porovnajte ich (vypočítaním ich pomeru) pre $\kappa \ll 1$. Je výsledok v zhode s očakávaním z prednášky? Ako sa po zapnutí poruchy zmení v tomto prípade emisná čiara JHO pochádzajúca z prechodu z prvej excitovanej hladiny na základnú hladinu?

Akú zmenu uvedenej emisnej čiary by ste očakávali v limite $\kappa \gg 1$? Je toto očakávanie v zhode s Vaším výpočtom? **[2 body]**