

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. základné pojmy

Pripomeňte si základné pojmy: základný stav, excitované stavy (prvý, druhý, n -tý), ionizovaný stav, viazaný stav - a každý z týchto pojmov prediskutujte pre atóm vodíka (čiže pre elektrón v atóme vodíka) a tiež pre časticu na úsečke.

2. základné pojmy - pokračovanie

Môže mať elektrón energiu $E > 0$ v Coulombovskom poli od bodového nekonečne ťažkého protónu? Je takáto sústava stále atómom vodíka (čiže viazaným stavom elektrónu)?

Môže izolovaná sústava dvoch elektrónov vytvoriť viazaný stav?

Môže izolovaná sústava dvoch protónov vytvoriť viazaný stav?

Môže izolovaná sústava, ktorá pozostáva z dvoch protónov a dvoch neutrónov vytvoriť viazaný stav?

Čo by ste povedali na otázku, prečo nie je v prírode atómové jadro s piatimi nukleónmi?

Môže nejaká sústava dvoch nukleónov tvoriť viazaný stav?

(Nukleón je skrátené označenie pre protón alebo neutrón, teda častice jadra.)

3. častica na úsečke

Poznámka k označeniam: v nulovom čase budeme odteraz označovať $\Psi_n(x, t = 0)$ ako $\Psi_n(x)$.

(a) Aká je predpoveď pre výsledok merania polohy častice na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi_3(x)$?

(b) Aká je predpoveď pre výsledok merania polohy častice na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi_5(x)$? Líši sa od predpovede v časti (a)?

(c) Aké (koľké) excitované stavy to sú? A aká je predpoveď pre strednú hodnotu týchto meraní?

(d) Aká je predpoveď pre výsledok merania polohy častice na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2(x)$?

(e) Aká je predpoveď pre strednú hodnotu týchto meraní? Je stále $L/2$?

(f) Viete navrhnúť jednoduchú superpozíciu stacionárnych stavov tak, aby stredná hodnota merania polohy bola väčšia ako $L/2$?

4. častica na úsečke - časový vývoj

(a) Aký je časový vývoj vlnovej funkcie $\Psi_n(x, t > 0)$, ktorá je v čase $t = 0$

rovná $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$?

Načrtnite graf $|\Psi_n(x, t > 0)|^2$ v ľubovoľnom čase $t > 0$.

(b) Aký je časový vývoj vlnovej funkcie $\Psi_+(x, t > 0)$? Teda napíšte, čomu sa rovná táto funkcia.

Načrtnite graf $|\Psi_+(x, t > 0)|^2$ v čase $t_1 = \pi\hbar/(3E_1)$ a v čase $t_2 = 2t_1$.

5. častica na úsečke - ortogonalita funkcií $\{\Psi_n(x)\}$

Ukážte, že platí $\int_0^L \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{mn}$, pre $m, n = 1, 2, 3, \dots$.

6. častica na úsečke - normovanie superpozície

(a) Uvažujme časticu na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \sum_{n=1}^N c_n \Psi_n(x)$, kde c_n sú komplexné čísla. Akú podmienku musia spĺňať tieto koeficienty, aby bola $\Psi(x)$ správne normovaná?

Pri odvodení odpovede by mala byť užitočná ortogonalita dokázaná v predchádzajúcom príklade.

(b) Na základe čoho nás odvodená podmienka motivuje k tvrdeniu, že $|c_n|^2$ je pravdepodobnosť, s akou pri meraní energie častice v stave $\Psi(x)$ nameriame energiu E_n ?

7. častica viazaná vo štvorci o strane L

Uvažujme časticu (v dvoch rozmeroch) viazanú na štvorec o strane L . Jej stav s energiou $E_{m,n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(m^2+n^2)$ je popísaný vlnovou funkciou $\Psi_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{m\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi y}{L}$.

(a) Aká je energia 1., 2. a 3. excitovaného stavu ako násobok $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$?

(b) Aká je degenerácia týchto stavov?

8. častica viazaná v kocke s hranou L

Zovšeobecnite tvrdenia predchádzajúceho príkladu na trojrozmerný prípad a odpovedzte na tie isté otázky pre časticu v troch rozmeroch viazanú v kocke o hrane L .