

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. voľná častica

(a) Napíšte (pokúste sa spamäti), aká vlnová funkcia popisuje v jednom rozmere voľnú časticu v stave s ostrou hodnotou hybnosti. Normováciu konštantu ponechajte predbežne ako neurčené A .

Ostrá hodnota hybnosti znamená, že keby sme merali hybnosť na veľkom počte takýchto identických pripravených časticach, po každej by sme určite namerali tú istú hybnosť.

(b) Možno tento stav nazvať stacionárnym? Na základe čoho?

(c) Na prednáške sme odvodili de Broglieho vlnovú dĺžku λ tejto častice. Vlnová funkcia je však periodická nielen v priestore, ale aj v čase. Odvoďte, čomu je rovná perióda T tejto vlnovej funkcie, a to podobným spôsobom, ako bola odvodená λ .

2. voľná častica

Na prednáške sme povedali, že normovanie vyššie diskutovanej vlnovej funkcie je netriviálne a riešime ho buď normovaním na delta funkciu alebo normovaním na konečný interval (v 1-d svete) alebo konečný objem (v 3-d svete). V tomto príklade určite, čomu je rovná normovacia konštanta A v týchto prípadoch.

(a) Pre normovanie na Diracovu delta funkciu si spomeňte na normováciu podmienku uvedenú na prednáške a na vzťah pre delta funkciu $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$. Čomu je potom rovná normovacia konštanta A ?

(b) Ako dodatok k predchádzajúcej otázke: dostávame rovnakú A , ak namiesto normovacej podmienky $\int \Psi_p^*(x) \Psi_{p'}(x) = \delta(p - p')$ použijeme (tiež možnú) podmienku $\int \Psi_k^*(x) \Psi_{k'}(x) = \delta(k - k')$, kde $k = p/\hbar$?

Odkiaľ sa berie rozdiel? *Pomôcka: spomeňte si, čomu je rovná $\delta(ax)$ pomocou $\delta(x)$, pre reálne $a > 0$.*

(c) Určte teraz normováciu konštantu A v trojrozmernom svete, ak vlnovú funkciu $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ normujeme na delta funkciu.

(d) Čomu je rovná normovacia konštanta A , ak normujeme vlnovú funkciu $\Psi_k(x)$ na konečný interval L ?

(e) Určte teraz normováciu konštantu A v trojrozmernom svete, ak vlnovú funkciu $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ normujeme na konečný objem $V = L^3$.

3. častica na úsečke

V nasledujúcich príkladoch uvažujeme časticu na úsečke dĺžky L . Pripomeňme, že v čase $t = 0$ sú vlnové funkcie jej stavov s energiou $E_n = E_1 n^2$ rovné $\Psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin(n\pi x/L)$.

(a) Uvažujme časticu v základnom stave a prístroj, ktorým meriame jej polohu. Zamyslite sa nad pravdepodobnosťami, s akými nameriame, že častica sa nachádza v prvej polovici úsečky, resp. v druhej polovici úsečky. Ktorá je väčšia?

Zoradte podľa veľkosti pravdepodobností, s akými nameriame, že častica sa nachádza

(i) v prvej štvrtine úsečky, (ii) v druhej štvrtine úsečky, (iii) v tretej štvrtine úsečky.

Poznámka: Netreba tu nič počítať. Iba v prípade, že máte naozaj dostatok času vypočítajte výsledok $\frac{1}{4} - X$ pre prípad (i) a ukážte, že $X = \frac{1}{2\pi}$.

(b) Ako sa zmenia tieto predpovede, ak je častica v prvom excitovanom stave? Čomu je vtedy rovné X ?

4. častica na úsečke

Uvažujme časticu na úsečke dĺžky L v časovom okamihu $t = 0$. Častica je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Psi_2(x) + \frac{2}{\sqrt{5}} \Psi_3(x)$.

(a) Akú predpoveď vieme dať o výsledku jedného merania energie častice?

(b) Akú predpoveď vieme dať o výsledku druhého merania energie na tej istej častici?

(c) Akú predpoveď vieme dať o výsledku mnohých meraní energie nasledujúcich po sebe na tej istej častici?

(d) Uvažujme veľa identických sústav, každá s časticou na úsečke pripravenou v stave $\Psi(x)$ zo zadania vyššie. Akú predpoveď vieme dať o výsledku meraní energie na týchto sústavách, pričom na každej sústave meriame energiu častice iba jeden raz?

(e) Určte strednú hodnotu meraní z časti (d).

(f) Ak ste túto strednú hodnotu meraní z časti (d) vypočítali dosadzovaním do vzorca $\bar{E} = \sum_{n=2,3} E_n P(E_n)$, tak sa teraz zamyslite, ako dostať výsledok bez počítania.

(g) Určte bez počítania strednú kvadratickú odchýlku meraní energie z časti (d).

5. Navrhňte vlnovú funkciu častice na úsečke, ktorá bude popisovať časticu, ktorej možno namerať iba štyri rôzne hodnoty energie E_1 , E_2 , E_3 a E_4 a to s pravdepodobnosťami, ktoré budú v pomere 4:3:2:1.

6. = A10. Zbierka, str.17 tlačená verzia a str.15 pdf. Častica na úsečke.

Aproximujte π elektróny v molekule hexatriénu šiestimi neinteragujúcimi elektrónmi viazanými na úsečku dĺžky L a určte rozdiel medzi energiou základného a prvého excitovaného stavu takejto sústavy. ($L = N \times \Delta\ell$, kde $N = 6$ je počet elektrónov a $\Delta\ell = 0.289/2 = 0.1445 \text{ nm}$ je stredná vzdialenosť medzi atómami uhlíka. Zarátané tu je vyčnievanie elektrónového oblaku z uhlíkového reťazca o dĺžku $\Delta\ell/2$ na každú stranu.)

V akej časti el-mag spektra sú fotóny z takýchto prechodov? Porovnajte s experimentálnym údajom uvedeným v texte v Zbierke.

Je hexatrién vhodný ako farbivo? (T.j. odpovedá prechod pohlcovaniu elmag žiarenia z viditeľného spektra?)

Aká podobná lineárna molekula: dlhšia (viac atómov C) či kratšia (menej atómov C), by mohla byť vhodná ako farbivo vďaka študovanému prechodu?

7. Uvažujme časticu na úsečke $< 0, L >$ v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = Ax(L-x)$. Načrtnite vlnovú funkciu častice.

Ako prvé vypočítajte najskôr A . Odporúčame pritom položiť $L = 1$ a využiť $\int_0^1 t^M (1-t)^N dt = \frac{M!N!}{(M+N+1)!}$. Do výsledku dodajte správnu mocninu L .

Určte, ako by sa počítala pravdepodobnosť $P(E_1)$ namerať v tomto stave častici ener-

giu základného stavu E_1 . Vyhodnoťte $P(E_1)$ číselne iba v prípade veľkého dostatku času.

Čo sa dá bez počítania povedať o $P(E_2)$?

Čo sa dá bez počítania povedať o všetkých ostatných $P(E_n)$, $n > 2$?

Vychádzajúc z náčrtku $\Psi(x)$ okomentujte, prečo pre $P(E_1)$ vychádza najväčšia. Bez počítania, len na základe výsledku $P(E_1)$ odhadnite $P(E_3)$. *Myslíme naozaj $P(E_3)$ a nie $P(E_2)$.*

8. = A11 v Zbierke, str.16 (tlačená verzia) a str.19 (pdf).

Elektrón je viazaný na úsečke a nachádza sa v základnom stave. Vyjadrite silu, ktorou treba zvonka pôsobiť na krajné body úsečky. Má úsečka s elektrónom tendenciu sa rozopnúť alebo sa stiahnuť?

Návod: Ako závisí energia na dĺžke úsečky L ?

Ak sa dĺžka zväčší na $L + dL$, ako sa zmení energia do prvého rádu v dL ?

Kto koná prácu pri roztiahnutí úsečky z L na $L + dL$: elektrón na vonkajší svet, alebo vonkajší svet na elektrón? Ako pomocou sily vyjadriť túto prácu?

9. Porovnajte silu F_1 z výsledku príkladu **8.** s Coulombovou silou F_2 na elektrón vo vzdialenosti L od kladne nabitého jadra v atóme vodíka.

Zamyslite sa nad tým, či je dôvod očakávať, že niektorá z týchto dvoch síl je zjavne väčšia než druhá.

Numericky vypočítajte pomer F_2/F_1 pre $L = a_1 = 0.5 \times 10^{-10} \text{m}$ (*Bohrov polomer*). Pri výpočte nechceme používať kalkulačku, ak netreba. Preto doplňte výraz s $e^2/4\pi\epsilon_0$ na bezrozmernú hodnotu $\alpha = 1/137$, a využijete známu hodnotu súčinu $\hbar c$ a $m_e c^2$.