

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. voľná častica

(a) Uvažujme voľnú časticu v jednom rozmere v stave s ostrou hodnotou hybnosti $p > 0$. Napíšte (pokúste sa spamäti), aká vlnová funkcia popisuje túto časticu, vrátane časovej závislosti. Uvažujte vlnovú funkciu normovanú na delta funkciu.

(b) Tá istá úloha, len častica je v stave s ostrou hodnotou hybnosti $-p$, kde $p > 0$.

(c) Aké sú fázové rýchlosti odvodené z týchto dvoch vlnovch funkcií?
Sú rovnaké?

(d) Aké sú de Broglieho vlnové dĺžky odvodené z týchto dvoch vlnovch funkcií?
Sú rovnaké?

2. voľná častica

Uvažujme vlnový balík $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_k \Psi_k(x) dk$, kde c_k je centrované na hodnote k_0 a mimo intervalu $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ je c_k zanedbateľne malé, pričom $0 < \Delta k \ll k_0$. Vychádzajúc z $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}$ ukážte, že grupová rýchlosť vychádza rovná rýchlosti v klasickej limite $\hbar k_0/m$.

3. voľná častica

Uvažujme dva stavy voľnej častice v trojrozmernom priestore popísané vlnovými funkciami Ψ_A a Ψ_B , kde $\Psi_A(x, y, z, t) = \alpha e^{i(pr-Et)/\hbar}$ a $\Psi_B(x, y, z, t) = \beta e^{i(pr+Et)/\hbar}$. Veličina r je tu $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. α a β sú bližšie nešpecifikované normovacie konštanty.

(a) Odpovedajú Ψ_A a Ψ_B rovinným vlnám?

(b) Aký tvar majú vlnoplochy týchto dvoch vln?

(c) Ktorá vlna odpovedá rozbiehavej vlne a ktorá zbíhavej vlne? Odpoveď vysvetlite.

(d) Popisujú tieto vlnové funkcie - ignorujúc normovanie - kvantový stav častice s hybnosťou p ? Ak áno, aký vektor $\vec{p}$ to je? Ak nie, prečo nie?

4. voľná častica

(a) Čo by ste povedali na otázku, akú hybnosť nameriame častici popísanej vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\vec{p}_1}(\vec{r}, t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\vec{p}_2}(\vec{r}, t)$?

Návod: spomeňte si na výsledok merania energie pre časticu na úsečke, kde častica bola v superpozícii stavov s rôznymi energiami.

(b) Čomu sú rovné stredné hodnoty $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ a $\bar{p}_z$ pre merania zložiek hybností na veľa identicky pripravených časticiach v stave z (a)?

(c) Čomu je rovné Δp_x , Δp_y a Δp_z pre neurčitosti merania zložiek hybnosti častice z (a).

(d) Čomu je rovná stredná hodnota $\bar{E}$ pre meranie energie na veľa identicky pripravených časticiach v stave z (a)?

(e) Navrhните vlnovú funkciu stavu voľnej častice, ktorej pri meraní hybnosti nameriame hybnosti $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$ s pravdepodobnosťami $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$.

5. voľná častica

Voľná častica s vlnovou funkciou normovanou na konečný (obrovský) interval dĺžky L a periodickými okrajovými podmienkami je vo všeobecnosti v čase $t = 0$ popísaná vlnovým balíkom $\sum_n c_n \Psi_{p_n}$, kde stav s ostrou hodnotou hybnosti $\Psi_{p_n} = e^{ip_n x/\hbar}/\sqrt{L}$. Hybnosť je diskretná (nie spojitá), aby spĺňala periodické okrajové podmienky: $p_n = \frac{2\pi\hbar}{L}n$, $n \in \mathbb{Z}$. V tomto príklade uvažujme, že tento balík sa redukuje na

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left(\frac{2}{2+i} e^{iqx/\hbar} + c e^{-iqx/\hbar} \right),$$

kde hybnosť $q > 0$ je nejakým veľkým celočíselným násobkom $\frac{2\pi\hbar}{L}$ (*ide tu opäť len o splnenie periodických okr. podmienok, zároveň to zaručuje ortogonálnosť rovinových vĺn, z ktorých sa skladá naša superpozícia*).

- (a) Určte všetky možné hodnoty c pre správne normovanú $\Psi(x)$.
- (b) Aká je pravdepodobnosť, že pri meraní hybnosti v stave Ψ nameriame hybnosť q , hybnosť $-q$, hybnosť $2q$, hybnosť s absolútnou hodnotou rovnou q ?
- (c) Aká je stredná hodnota hybnosti častice v stave Ψ ?
- (d) Aká je neurčitosť hybnosti Δp častice v stave Ψ ?
- (e) Čo by ste odpovedali na otázku, aká je hybnosť častice v stave Ψ ?
- (f) Aké energie možno namerať v stave Ψ a s akou pravdepodobnosťou?
Čo by ste odpovedali na otázku, aká je energia častice v stave Ψ ?
- (g) Častici v stave Ψ sme namerali hybnosť q .
Na tejto istej častici budeme potom merať hybnosť aj druhýkrát.
S akou pravdepodobnosťou akú hybnosť nameriame?
- (h) Nech $\Psi(x) = \Psi(x, t=0)$. Napíšte $\Psi(x, t)$ pre $t > 0$.
Zmenia sa v neskoršom čase odpovede na niektoré z otázok (b)-(g)?
- (i) Závisí niektorá z odpovedí na veľkosti intervalu L ? Prečo nie?

6. voľná častica, vlnový balík

(a) Na prednáške sme predviedli päť príkladov vlnového balíka. Z toho dva, konkrétne $c(k) = \delta(k - k_0)$ a $c(k) = \text{konst.}$ sú triviálne. Načrtnite teraz priebeh funkcie

$$c_6(k) = \text{konst.} \frac{1}{1 + \frac{(k-k_0)^2}{(\Delta k)^2}}.$$

Ak $c_6(k)$ definuje vlnový balík, ako približne bude vyzeráť $\Psi(x)$ opisujúca stav častice, na základe balíkov prebratých na prednáške? Opäť načrtnite jej reálnu časť.

Pomôcka k presnému určeniu tohto vlnového balíka: Aký integrál treba spočítať pri presnom určení vlnovej funkcie tohto šiesteho balíka? Integrál stačí napísať. Ak to viete a máte dostatok času, vypočítajte ho. Napr. prechodom do komplexnej roviny v premennej k .

Pre $\Delta k > 0$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{k^2}{(\Delta k)^2}} e^{ikx} dk = \pi \Delta k e^{-\Delta k |x|}$$

Na základe znalosti tohto integrálu zopakujte náčrtok z úvodnej časti tohto príkladu.

Prečo je $c_6(k)$ menej vhodná na opis častice ako $c_4(k)$?

Pripomeňme, že $c_4(k)$ opisovala gaussovský balík.

7. Pripomeňte si vlnovú funkciu elektrónu v atóme vodíka v základnom stave. Uvažujme pravdepodobnosť, s akou nájdeme elektrón v medziguľovej vrstvičke s polomerom r a hrúbkou dr . Vypočítajte, pre ktoré r má táto funkcia maximum. Ak by ste mali iba jeden pokus nájsť elektrón v experimente, kde by bola najväčšia šanca nájsť ho?