

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. nenulové komutátory

(a) Odvodte, čomu je rovný komutátor $[\hat{x}, \hat{p}_x]$. Výjdite z pôsobenia $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x}$ na ľubovoľnú vlnovú funkciu $\Psi(x)$.

(b) Aký vzťah neurčitosti platí pre $\Delta A \Delta B$, ak pre operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$ platí $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$?

(c) Aký vzťah neurčitosti dostávame v (b) pre polohu a hybnosť?

(d) Nech je kvantový stav elektrónu Ψ popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x)$. Uvažujme, či existuje taká $\Psi(x)$, ktorá je zároveň vlastnou funkciou $\hat{p}_x$ aj $\hat{x}$. Koľko rôznych polôh elektrónu by sme merali v stave Ψ ? Čomu by bolo potom rovné Δx v tomto stave?

Koľko rôznych hodnôt hybnosti p_x elektrónu by sme merali v stave Ψ ? A čomu by bolo rovné Δp_x ?

Bol by splnený vzťah neurčitosti z časti (c)? Je teda možné, aby existoval stav Ψ , ktorý navrhujeme v tejto časti úlohy?

A je teda možný stav Ψ , na ktorom by sme striedavo merali jeho polohu a hybnosť, opakovane, (v čase tesne za sebou), pričom stav by sa po meraní nemenil, takže aj po opakovaných meraniach polohy a hybnosti by sme dostávali stále rovnaké výsledky pre polohu aj pre hybnosť?

2. komutátory

(a) Zjednodušte komutátor $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ na výraz, v ktorom budú už len jednoduché komutátory.

(b) Použite výsledok z časti (a) na výpočet komutátora $[\hat{x}^2, \hat{p}]$ pomocou známeho výsledku pre komutátor $[\hat{x}, \hat{p}]$.

3. Nadväzujúc na príklad 2.(b) určte $[\hat{x}^3, \hat{p}]$, prípadne aj pre vyššie mocniny operátora $\hat{x}$, aby ste mohli uhádnuť, čomu sa rovná $[\hat{x}^N, \hat{p}]$ pre ľubovoľné prirodzené číslo N . Svoj tip potom dokážte matematickou indukciou.

Dôkaz matematickou indukciou obsahuje dva kroky. Prvým je overenie, že hypotéza (tip) platí pre $N = 1$ a druhým, zvyčajne ťažším krokom je overenie, že ak hypotéza platí pre N , tak z toho vyplýva, že platí aj pre $N + 1$.

Nakoniec overte výsledok pre $[\hat{x}^N, \hat{p}]$ priamym výpočtom.

4. komutátory a spoločné vlastné funkcie

V tomto príklade možno opäť pekne vidieť, ako spoločné vlastné funkcie dvoch operátorov úzko súvisia s nulovým komutátorom týchto operátorov a naopak, že dva nekomutujúce operátory nemajú spoločné vlastné funkcie.

(a) Na prednáške sme dokázali, že komutujúce operátory s nedegenerovaným spektrom majú spoločné vlastné funkcie. Uvažovali sme voľnú časticu a poukázali na to, že operátor hybnosti tu komutuje s hamiltoniánom. Avšak hamiltonián má 2x degenerované vlastné hodnoty, a preto nie každá jeho vlastná funkcia je aj vlastnou funkciou $\hat{p}$. Napíšte (v jednom rozmere), ktoré funkcie sú spoločné vlastné funkcie $\hat{H}$ aj $\hat{p}$.

Sú tieto funkcie zároveň vlastnými funkciami operátora parity $\hat{P}$?

(b) Ukážte, že operátor parity komutuje s hamiltoniánom voľnej častice a napíšte, ktoré funkcie sú zároveň vlastnými funkciami $\hat{H}$ aj $\hat{P}$. Sú tieto funkcie zároveň vlastnými funkciami operátora hybnosti $\hat{p}$?

(c) Vypočítajte komutátor $[\hat{p}, \hat{P}]$, resp. ukážte, že je rovný $-2\hat{P}\hat{p}$. Podstatné je, že sa nerovná nule. A teda operátory $\hat{p}$ a $\hat{P}$ nekomutujú. Budú mať tieto operátory spoločné vlastné funkcie? Prečo nie?

5. Na základe predchádzajúceho príkladu napíšte vzťah neurčitosti pre súčin $\Delta p \Delta P$ v ľubovolnom stave Ψ .

Vyskúšajte, či je splnený pre $\Psi(x) = Ae^{-x^2/x_Q^2}$, kde A je normovacia konštanta a x_Q je konštanta s rozmerom dĺžky. Pomôcka: začnite pravou stranou vzťahu neurčitosti. Ak vyšla nula, vzťah neurčitosti je splnený bez ohľadu na konkrétnu veľkosť Δp a ΔP , lebo stredná kvadratická odchýlka je z definície iba kladná alebo rovná nule.

Ak je systém v uvažovanom stave Ψ v poli potenciálu $V(x) = \alpha x^2$, kde konštanta $\alpha = m\omega^2/2$, pričom $x_Q = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, tak tento systém je jednoduchý harmonický oscilátor v základnom stave. Význam konštánt m a ω bude zrejmý neskôr. Bonusový príklad dú sady 5 nadväzuje na tento príklad. Navrhujeme tam stav, ktorý je superpozíciou základného stavu a excitovaného stavu, pre ktorý vychádza netriviálny vzťah neurčitosti pre Δp a ΔP .

6. Uvažujme systém, ktorého energetická hladina E je dvakrát degenerovaná s odpovedajúcimi vlastnými funkciami $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$, ktoré sú správne normované a sú na seba ortogonálne: $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)^* \Psi_2(x) dx = 0$.

(a) Dokážte, že ľubovoľná superpozícia $\Phi(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)$, kde c_1 a c_2 sú komplexné čísla, je tiež vlastnou funkciou hamiltoniánu s vlastnou hodnotou E .

Poznámka: Tvrdenie je netriviálne už pre lineárne nezávislé $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$.

Ortogonalitu týchto dvoch funkcií uvažujeme až kvôli nasledujúcej časti úlohy.

(b) Dokážte, že pre ľubovoľné dve komplexné čísla c_1 a c_2 , ktoré spĺňajú $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ sú superpozície $\tilde{\Psi}_1(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)$ a $\tilde{\Psi}_2(x) = -c_2^*\Psi_1(x) + c_1^*\Psi_2(x)$ na seba ortogonálne a každá je správne normovaná.

Záver plynúci z tohto príkladu je veľmi dôležitý: ľubovoľné vlnovkové vlnové funkcie sú rovnako dobré ako nevlnovkové. Všetky takéto vlnovkové dvojice vlnových funkcií sú si plne ekvivalentné pre ľubovoľný výber c_1 a c_2 , pre ktoré $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

Typicky vyberáme také c_1 a c_2 , aby sme v ďalšom postupe používali $\tilde{\Psi}_1(x)$ a $\tilde{\Psi}_2(x)$, ktoré sú vlastné funkcie nejakého ďalšieho operátora, ktorý komutuje s hamiltoniánom.

V príklade 4. vyššie ukazujeme, že pre voľnú časticu to môže byť buď operátor hybnosti, alebo operátor parity. Pre operátor hybnosti to sú $\tilde{\Psi}_1(x) = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$, čiže $\Psi_p(x)$, a $\tilde{\Psi}_2(x) = e^{-ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$, čiže $\Psi_{-p}(x)$. Pre operátor parity $\tilde{\Psi}_1'(x) = \cos(px/\hbar)/\sqrt{\pi\hbar}$ a $\tilde{\Psi}_2'(x) = \sin(px/\hbar)/\sqrt{\pi\hbar}$. Od nečiarkovanej dvojice funkcií možno v tomto prípade prejsť k čiarkovanej dvojici pomocou $c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7. Uvažujme kvantový systém v stave Ψ . Aký vzťah neurčitosti bude platiť pre súčin Δx^2 a Δp v stave Ψ na základe Vášho výsledku v príklade 2.(b)? Je v princípe možné, aby pre rôzne stavy Ψ toho istého systému platili rôzne vzťahy neurčitosti? Odpoveď zdôvodnite.