

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

0. JHO - úvodné veci

Na prednáške sme zaviedli x_Q , typickú dĺžku pre JHO, teda pre systém s potenciálom $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Podobne možno z parametrov tejto sústavy zaviesť aj typickú hybnosť p_Q .

Čomu je rovná typická dĺžka x_Q a typická hybnosť p_Q ako funkcie parametrov kvantového JHO?

Čomu je rovný súčin $x_Q p_Q$?

Čomu je rovná bezrozmerná súradnica ξ ?

Čomu je rovná bezrozmerná energia ε ?

1. vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO

Pripomeňte si (napíšte) rekurentný vzťah pre koeficienty a_k , ktoré sme zaviedli na prednáške v mocninnom rade $v(\xi) = \sum a_k \xi^k$.

Rad $v(\xi)$ sme usekli a urobili z neho polynóm, aby sme nedostali $v(\xi)$ asymptoticky pripomínajúce funkciu e^{ξ^2} , a tým pádom by sme stratili pravdepodobnostnú interpretáciu vlnovej funkcie $\Psi(\xi) = v(\xi) e^{-\xi^2/2}$, ktorá by prestala byť kvadraticky integrovateľná.

Usekávame výberom $2\varepsilon = 2N + 1$. Následne dostávame $E_N = (N + \frac{1}{2})\hbar\omega$ a k nej odpovedajúcu vlastnú funkciu $\Psi_N(x)$, pre $N = 0, 1, 2, \dots$.

Na prednáške sme - až na normovaciú konštantu - odvodili $\Psi_0(\xi)$. Naozaj sa však zaujímate o $\Psi_0(x)$. Napíšte, aká funkcia je $\Psi_0(x)$. Určte jej normovaciú konštantu z toho, že $|\Psi_0(x)|^2$ je Gaussovo rozdelenie výskytu oscilátora.

Všeobecný tvar normovaného Gaussovho rozdelenia je $g_\sigma(x) = e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2}/(\sqrt{2\pi}\sigma)$, kde $\bar{x}$ je stredná hodnota polohy a σ stredná kvadratická odchýlka pre veľa meraní polohy.

2. vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO

Odvoďte z rekurentného vzorca $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$. Načrtnite ich priebeh spolu s odpovedajúcimi hustotami pravdepodobnosti výskytu JHO.

V prípade dostatku času a s pomocnými integrálmi uvedenými nižšie odvoďte ich normovacie konštanty.

3. ortogonalita vlnových funkcií stacionárnych stavov JHO

Použitím pomocných integrálov overte, že funkcie $\Psi_0(x)$, $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$ sú na seba navzájom ortogonálne. Musia byť, lebo odpovedajú rôznym vlastným hodnotám.

Pomocné integrály: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx = \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$, atď.

4. vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO, pokračovanie

Odvoďte - až na normováciu konštantu - $\Psi_3(x)$ a $\Psi_4(x)$ a načrtnite tieto vlnové funkcie, spolu s odpovedajúcimi hustotami pravdepodobnosti výskytu JHO. Nezabudnite na to, že *Hermitove* polynómy (Hermitove až na konštantu, resp. funkciu $v(\xi)$) dostávame v premennej $\frac{x}{x_Q}$ a nie v premennej x .

(a) Použitím pomocných integrálov overte, že $\Psi_4(x)$ je ortogonálna na $\Psi_0(x)$ a $\Psi_2(x)$.

(b) Podobne s použitím pomocných integrálov overte, že $\Psi_3(x)$ je ortogonálna na $\Psi_1(x)$.

5. ďalšie vlastnosti vlnových funkcií stacionárnych stavov JHO

Sú tieto funkcie vlastnými funkciami operátora parity? Ak áno, je k tomu dôvod?

Čomu je pre ne rovné $\bar{x}$ a čomu $\bar{p}$?