

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

0. JHO vo všeobecnom formalizme

Napíšte (skúste si spomenúť spamäti), akým vzťahom sme na prednáške zaviedli znižovací operátor $\hat{a}$ a zvyšovací operátor $\hat{a}^\dagger$. Z týchto dvoch vzťahov odvoďte, čomu sú rovné operátory $\hat{x}$ a $\hat{p}$ ako lineárna kombinácia $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$.

1. JHO: od všeobecného formalizmu k energetickej reprezentácii

(a) Na prednáške sme detailne odvodili tvar matice a_{ij} vychádzajúc zo vzťahu pre znižovanie stacionárnych stavov. Tento vzťah teraz napíšeme v tvare $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, kde $|n\rangle$ je n -tý stacionárny stav. (Pôvodne sme ho mohli na prednáške písať ako $|\Psi_n\rangle$.) Čomu sa potom rovnala matica a_{ij} ?

(b) Zopakujte rovnaký postup pre odvodenie tvaru matice $a_{ij}^\dagger$. Vyjdite zo vzťahu $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$. Naozaj Vám vychádza matica, ktorá je hermitovsky združená k matici a_{ij} ?

(c) Čomu teraz vychádza rovná matica pre hamiltonián $H_{ij} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})_{ij}$, kde $\frac{1}{2}$ je ešte násobená jednotkovou maticou, ktorá sa nepíše.

2. JHO v energetickej reprezentácii

Vypočítajte komutátor matíc $[a, a^\dagger]$. Viete vopred, čo má výjsť?

3. JHO v energetickej reprezentácii

V energetickej reprezentácii ukážte, že hamiltonián (jemu odpovedajúca matica) a parita (matica P bola odvodená v závere prednášky) naozaj komutujú.

4. JHO v energetickej reprezentácii

Použijúc vzťah z úvodu tohto cvičenia určte maticu x_{ij} .

Je hermitovská?

Má komutovať s hamiltoniánom? Komutuje?

5. JHO v energetickej reprezentácii

(a) Uvažujme stav JHO v tvare $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$. Čím reprezentujeme tento stav v energetickej reprezentácii?

(b) Určte strednú hodnotu merania polohy JHO v tomto stave. V ktorej reprezentácii je to najpohodlnejšie?

(c) Určte strednú hodnotu merania polohy JHO v stave $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|6\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|7\rangle$. V ktorej reprezentácii je to najpohodlnejšie?

6. JHO: znižovací a zvyšovací operátor

(a) V reprezentácii vlnovými funkciami ukážte, že znižovací operátor naozaj anihuje základný stav JHO do nuly (ničoty). T.j. vypočítajte $\hat{a}\Psi_0(x)$, kde $\Psi_0(x) =$

$1/\sqrt{\sqrt{\pi} x_Q} e^{-x^2/2x_Q^2}$, a $\hat{a} = (\frac{x}{x_Q} + i\frac{\hat{p}}{p_Q})/\sqrt{2}$, s operátorom $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ a typickou hybnosťou $p_Q = \sqrt{\hbar m \omega}$.

(b) Podobne v reprezentácii vlnovými funkciami ukážte, že zvyšovací operátor na-ozaj dáva prvý excitovaný stav pri pôsobení na základný stav JHO. T.j. vypočítajte $\hat{a}^\dagger \Psi_0(x)$. Mala by vyjsť vlnová funkcia prvého excitovaného stavu *aj so správnym normovaním*. Overte.

(c) Ako sú znižovanie v časti (a) a zvyšovanie v časti (b) reprezentované v energetickej reprezentácii?

7. JHO: časový vývoj v energetickej reprezentácii

V čase $t \geq 0$ uvažujme stav $\Psi(t)$ reprezentovaný stojacim vektorom s komponentami $c_n(t)$, kde $n = 0, 1, 2, \dots$. Aká diferenciálna rovnica platí koeficienty c_n , ak pre $\Psi(t)$ platí časová SchR?

Aké je jej riešenie pre $c_n(t)$ s počiatočnou podmienkou $c_n(0) = b_n$?

V energetickej reprezentácii určte $\Phi(t)$ ak v čase nula je tento stav rovný $|\Phi\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|6\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|7\rangle$.

V energetickej reprezentácii vypočítajte $\bar{x}(t)$, t.j. kmity strednej polohy oscilátora, ktorý je v stave $\Phi(t)$. Sú tieto kmity harmonické, v zhode s Ehrenfestovými vetami?

8. JHO: zložitejší komutátor

Vypočítajte komutátor hybnosti a parity v reprezentácii vlnovými funkciami. Výsledok vyjadrite pomocou týchto operátorov.

Zopakujte výpočet tohto komutátora v energetickej reprezentácii. Ukážte, že Vám vyšla matica, ktorá odpovedá výsledku v reprezentácii vlnovými funkciami.