

1. guľové funkcie $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ (spherical harmonics)

(a) V akom separovanom tvare píšeme vlnovú funkciu $\Psi(\vec{r})$ stacionárneho stavu systému so sféricky symetrickým potenciálom?

Od akých kvantových čísel závisí uhlová časť tejto vlnovej funkcie? Aké hodnoty môžu nadobúdať tieto kvantové čísla?

(b) Aký je celkový moment hybnosti častice v stacionárnom stave s vlnovou funkciou, ktorej uhlová časť je $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$?

Akú predpoveď vieme dať pre výsledok merania zložiek L_x , L_y a L_z tejto častice?

2. guľové funkcie $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

(a) V akom separovanom tvare píšeme vo všeobecnosti guľovú funkciu $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$?

Zvážte pri tom jeden detail, ktorý nebol zdôraznený na prednáške, že normovanie Legendrových polynómov, resp. pridružených Legendrových funkcií si vyžaduje prítomnosť normovacej konštanty A vo výraze pre $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$.

(b) Na čo sa zredukuje guľová funkcia $Y_{\ell 0}(\theta, \varphi)$?

(c) Ortogonalita: V triede bolo dokázané, že dva rôzne Legendrove polynómy sú na seba ortogonálne. Ako konkrétne vyzerala táto podmienka vyjadrená cez integrál z ich súčinu?

Aký dôsledok to má pre integrál $\int Y_{\ell 0}^* Y_{\ell' 0} d\Omega$, kde integrujeme cez celý priestorový uhol 4π a $\ell \neq \ell'$?

Poznámka: Pripomeňme, že $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, kde θ a φ sú nezávislé sférické premenné, pričom celý priestorový uhol 4π je pokrytý tým, že θ ide od nuly to π a φ od nuly do 2π .

(d) Normovanie: Na prednáške sme povedali, že pre Legendrove polynómy platí

$$\int_{-1}^{+1} [P_\ell(\cos\theta)]^2 d(\cos\theta) = \frac{2}{2\ell+1}. \quad (\text{Napísali sme to pre } \cos\theta = t.)$$

Čomu je rovná normovacia konštanta (jej absolútna hodnota $|A|$) v $Y_{\ell 0}(\theta, \varphi)$, ak má platiť pre integrál cez celý priestorový uhol $\int |Y_{\ell 0}|^2 d\Omega = 1$?

(e) Záverečné zovšeobecnenie (*netreba tu nič počítať, iba si to pamätať*): Pre normovanie guľových funkcií platí $\int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\theta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$.

3. guľové funkcie $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

(a) Na prednáške sme odvodili Legendrove polynómy $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, kde $t = \cos\theta$. Pripomeňte si, čomu sú rovné tieto funkcie. Presvedčte sa, že každá z nich je správne normovaná na faktor $\frac{2}{2\ell+1}$.

Overte tiež ich ortogonalitu.

(b) Odvodte, čomu sú rovné $Y_{00}(\theta, \varphi)$, $Y_{11}(\theta, \varphi)$, $Y_{10}(\theta, \varphi)$, $Y_{1-1}(\theta, \varphi)$ aj s ich správnym normovaním, pričom treba zobrať do úvahy, že normovacia konštanta $A \in \mathcal{R}$ a $A < 0$ pre $m = 1$, v ostatných prípadoch je kladná.

Znamienko súvisí s paritou, o ktorej bude reč neskôr.

Pripomeňme z prednášky, že pridruženú Legendrovu funkciu P_1^1 dostaneme zo súčinu $\sin\theta$ a prvej derivácie Legendrovho polynómu $P_1(t)$, kde $t = \cos\theta$.

(c) Presvedčte sa o ortogonalite guľových funkcií napísaných v časti (b). Kedy OG pochádza z integrácie cez uhol φ a kedy z integrácie cez uhol θ ?

4. guľové funkcie $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

(a) Pre ktoré guľové funkcie je celková vlnová funkcia **nezávislá** na uhloch? Koľko je takých guľových funkcií? Súvisí táto odpoveď s tým, aký je moment hybnosti častice v takomto stave?

Je v takomto prípade prítomný nejaký výnimočný smer?

(b) Aký moment hybnosti má častica v stave s kvantovými číslami $\ell = 1$ a $m = 0$? Čo môžeme povedať o výskyte takejto častice - dokonca bez toho, aby sme poznali radiálnu časť jej vlnovej funkcie? Kde sa určite *nenachádza*? V ktorom smere je najväčšia šanca nájsť ju pri meraní polohy?

(c) Čo ak pripravíme časticu v stacionárnom stave, ktorého uhlová časť vlnovej funkcie bude v tvare $\frac{1}{\sqrt{2}}Y_{11}(\theta, \varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_{1-1}(\theta, \varphi)$? Čo môžeme povedať o výsledkoch merania L^2 a L_z častice?

Čo môžeme povedať o výskyte takejto častice? Kde sa určite *nenachádza*? V ktorom smere je najväčšia šanca nájsť ju pri meraní polohy?

(d) Navrhnete uhlovú časť vlnovej funkcie ako superpozíciu funkcií $Y_{1m}(\theta, \varphi)$ (teda pre $\ell = 1$) tak, aby bola istota, že časticu v tomto stave *nenájde* na osi y .

5. menej triviálne Legendrove polynómy a guľové funkcie $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$

(a) Na prednáške sme odvodili tvar Legendrovho polynómu $P_2(t)$. Pomocou neho napíšte tvar $Y_{20}(\theta, \varphi)$ aj so správnym normovaním. Načrtnite guľu v troch rozmeroch a na nej smery, v ktorých má pravdepodobnosť výskytu častice maximum (môže byť aj lokálne), v prípade, že sme jej namerali $L^2 = 6\hbar^2$ a $L_z = 0$.

(b) Vďaka známemu $P_2(t)$ určte pridruženú Legendrovu funkciu $P_2^1(t)$ a z nej $Y_{21}(\theta, \varphi)$, až na normovaciú konštantu. Kde sú teraz najpravdepodobnejšie smery výskytu častice?

(c) Pri dostatku času to isté aj pre $Y_{22}(\theta, \varphi)$.

6. vyššie Legendrove polynómy

(a) Využitím rekurentného vzťahu určte Legendrove polynómy P_3 a P_4 aj s ich správnym normovaním.

(b) Ktoré guľové funkcie už vieme teraz ľahko napísať vychádzajúc zo známych P_3 a P_4 ?

7. meranie momentu hybnosti

Uvažujme časticu v stave popísanom separabilnou vlnovou funkciou $\Psi(\vec{r}) = R(r)f(\theta, \varphi)$. S akou pravdepodobnosťou aké hodnoty L^2 a L_z nameriame častici, pre ktorú

(a) $f(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta + \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \right),$

(b) $f(\theta, \varphi) = \sqrt{3} \cos \theta + 1,$

(c) $f(\theta, \varphi) = \cos \theta + 1,$

(d) $f(\theta, \varphi) = 3 \cos \theta + 4,$

(e) $f(\theta, \varphi) = \cos^2 \theta + \cos \theta + 1?$