

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie

1. spin: Pauliho matice

Napíšte, ako sú operátory $\hat{S}_z$, $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$ reprezentované v spinorovej reprezentácii.

Aké komutačné vzťahy musia spĺňať tieto matice?

Odvoďte z toho, aké komutačné vzťahy musia spĺňať Pauliho matice σ_z , σ_x a σ_y .

Overte priamym výpočtom, čomu sa rovnajú $[\sigma_y, \sigma_z]$ a $[\sigma_z, \sigma_x]$. Vychádza po každé to, čo očakávate?

2. rýchla diagonalizácia 2x2 hermitovských matíc

Každá hermitovská matica je diagonalizovaná unitárnou transformáciou. Napíšte, čo vo všeobecnosti znamená "unitárna transformácia matice A ".

Pripomeňte si, ako z vlastných vektorov hermitovskej matice A - vo všeobecnosti - získame unitárnu maticu, ktorá v unitárnej transformácii diagonalizuje maticu A .

Pre 2x2 maticu A netreba postupovať podľa všeobecného postupu, ktorý ste si práve pripomenuli. Stačí vedieť, že každá unitárna transformácia zachováva stopu matice a tiež determinant matice. Nájdite takouto rýchlou diagonalizáciou vlastné hodnoty 2x2 matice A , ktorej elementy sú $A_{11} = 2$, $A_{12} = \sqrt{3}$, $A_{21} = \sqrt{3}$ a $A_{22} = 4$.

3. spinory

Na prednáške sme napísali vlastné vektory Pauliho matíc σ_x a σ_y . To sú samozrejme aj vlastné vektory $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$, čiže sú to spinory reprezentujúce spinové stavy po prechode elektrónov cez SG prístroje natočené v smere x a y .

(a) Overte, že uvedené spinory sú správne normované a že sú to naozaj vlastné vektory Pauliho matíc σ_x a σ_y (a teda aj matíc S_x a S_y).

(b) Overte ortogonalitu dvojice vlastných vektorov každej Pauliho matice.

(c) Z vlastných vektorov skonštruujte unitárne matice, ktoré diagonalizujú σ_x a σ_y (a teda aj matice S_x a S_y).

(d) Urobte skúšku správnosti (test), že Vaše matice z časti (c) naozaj diagonalizujú σ_x a σ_y .

4. spinory

Elektróny v spinovom stave $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z a s akými pravdepodobnosťami nameriame prístrojom?

Aká je stredná hodnota merania S_z na týchto elektrónoch? Aká je neurčitosť ΔS_z tohto merania?

5. spinory

Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} i \\ 5 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi z . Aké hodnoty S_z nameriame prístrojom a s akými pravdepodobnosťami?

6. spinory

Elektróny v spinovom stave $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s

nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aké hodnoty S_x a s akými pravdepodobnosťami nameriame prístrojom?

Aká je stredná hodnota merania S_x na týchto elektrónoch? Aká je neurčitost' ΔS_x tohto merania?

7. *spinory*

Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} i \\ 5 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi x . Aké hodnoty hodnoty S_x nameriame prístrojom a s akými pravdepodobnosťami?

8. *spinory*

Elektróny v spinovom stave $A \begin{pmatrix} i \\ 5 \end{pmatrix}$, kde A je normovacia konštanta, prechádzajú cez Sternov-Gerlachov prístroj s nehomogénnym magnetickým poľom v smere osi y . Aká je stredná hodnota merania S_y nameraná prístrojom po prechode mnohých elektrónov?