

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie - 23.9.2025

Relativistický alebo nerelativistický opis?

Tento semester sa budeme spolu učiť kvantovú mechaniku. Je dôležité mať celý čas na pamäti, že to je **nerelativistická** teória. Niekedy v letnom semestri sa ukáže potrebné pridať aj relativistické korekcie. Treba teda základné porozumenie, kedy je častica relativistická a kedy nie. Pomôžu k tomu tieto príklady.

1. relativita z trojuholníka

(a) Načrtnite si pravouhlý trojuholník s odvesnami v horizontálnom a vertikálnom smere *rádovo* rovnakej dĺžky. Uvažujme voľnú časticu s hmotnosťou m a hybnosťou p . Nech odteraz jedna odvesna vášho trojuholníka, povedzme horizontálna, odpovedá veličine mc^2 a druhá odvesna (vertikálna) odpovedá veličine pc . Napíšte Pytagorovu vetu pre tento trojuholník. Akej fyzikálnej veličine je rovná prepona trojuholníka na základe Pytagorovej vety?

(b) Načrtnite teraz opäť pravouhlý trojuholník, s pôvodnou horizontálnou odvesnou nezmenenou mc^2 a s vertikálnou odvesnou pc scvrknutou skoro až na nulu. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je častica s takouto hybnosťou nerelativistická alebo ultrarelativistická?

Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu? Inými slovami, čomu sa približne rovná energia takejto častice v porovnaní s mc^2 a pc ?

Keďže hybnosť častice je stále nenulová, hoci maličká voči mc^2 , ako závisí energia ($E - mc^2$) od hybnosti v uvažovanom prípade $pc \ll mc^2$? Táto závislosť sa nedá vyčítať z obrázka. Je to o niečo ťažšia otázka ako tie predchádzajúce, zvlášť, ak by ste mali odpoveď odvodiť. Viete ju odvodiť?

Ako bežne voláme veličinu ($E - mc^2$)?

(c) Opačná limita ako v (b): v trojuholníku teraz zväčšíte pôvodnú vertikálnu odvesnu $pc \gg mc^2$, ponechajúc horizontálnu odvesnu mc^2 pôvodnej dĺžky. Akej fyzikálnej situácii to odpovedá? Je takáto častica nerelativistická alebo ultrarelativistická?

Čo tu možno z obrázka tvrdiť pre energiu?

Ako je ešte významné, či je častica hmotná alebo nehmotná? Ak má hmotná častica tak veľkú energiu, že jej hmotnosť sa stala bezvýznamnou a možno ju zanedbať, časticu voláme ultrarelativistickou. Jej kinematika (opis pohybu) sa stáva rovnaká ako kinematika fotónu, častice svetla s nulovou hmotnosťou. Napríklad rýchlosť ultrarelativistickej častice je už prakticky rovná c .

2. elektrón, protón, neutrón, alfa častica - kedy sú relativistické

(a) Koľko je mc^2 pre elektrón? (s presnosťou na 3 platné cifry)

Koľko je mc^2 pre protón? (s presnosťou na 5 platných cifier)

Koľko je mc^2 pre neutrón? s presnosťou na 5 platných cifier)

Koľko je mc^2 pre α časticu? Čo je α častica?

Ako by vyzerali tieto odpovede, ak by stačila presnosť do 10%?

(b) Je alebo nie je relativistická α častica z Rutherfordovho experimentu, pri ktorom Rutherford objavil/odvodil, že v atóme je tvrdé jadro? V odpovedi zvážte, že Rutherford mal ako zdroj α častíc len nejakú prirodzene rádioaktívnu horninu, napr. možno smolinec z Jáchymova.

(c) Je energeticky možné, aby pri rozpade neutrónu na protón vznikol aj elektrón?

Je alebo nie je takýto elektrón relativistický?

Odpovede zdôvodnite.

(d) LHC urýchľuje protóny na maximálnu energiu 7 TeV. "T" je skratka pre "tera" a rovná sa tisíc Giga, resp. $\text{TeV} = 10^{12} \text{ eV}$. Sú tieto protóny nerelativistické, relativistické alebo ultrarelativistické?

Svoje odpovede zdôvodnite.

Dôležitá poznámka: V minulosti ste sa naučili, že či je častica relativistická, určíme porovnaním jej rýchlosti s rýchlosťou svetla. To je správne, ale v kvantovom svete máme problém hovoriť o rýchlosti častice, keďže princíp neurčitosti nedovolí merať presne polohu a hybnosť. V kvantovom svete sa veľmi zide to, čo sme sa práve naučili: určovať, či je častica relativistická z jej energie, prípadne z jej hybnosti porovnaním s mc^2 .

3. nabitá častica urýchlená potenciálovým rozdielom

(a) Elektrón urýchlíme z pokoja potenciálovým rozdielom

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) 1 MV = 1000 kV,

(iv) 10 MV.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je elektrón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(b) Aká je v každom z týchto prípadov jeho kinetická energia po urýchlení zadaným potenciálom?

(c) Aká je v každom z týchto prípadov jeho celková energia?

Vráťte sa k prvému príkladu s pravouhlými trojuholníkmi a rozhodnite, ktorý z načrtnutých trojuholníkov odpovedá elektrónu po prechode cez jednotlivé potenciálové rozdiely.

4. Relativita - pokračovanie

(a) Stojaci nehybný protón urýchlíme rovnakým potenciálovým rozdielom ako predtým elektrón:

(i) 1 V (Volt),

(ii) 1 kV = 1000 V,

(iii) 1 MV = 1000 kV,

(iv) 10 MV.

Bez veľkého počítania rozhodnite, či je protón po prechode cez zadaný potenciálový rozdiel relativistický, prípadne ultrarelativistický.

(b) Od zhruba akého potenciálového rozdielu bude potrebné považovať urýchlený protón za relativistickú časticu? Asi aký dlhý tunel na to treba, ak sa protón pohybuje po priamke a prierné napätie vzduchu či vo vákuu je cca 1 MV/m?

Poznamenajme, že urýchlujúce elektrické pole generované ako maximum pulznej elmag vlny dosahuje dnes hodnoty 60 MV/m. Sofistikované lineárne urýchlňovače teda nie sú limitované vyššie uvedenou hodnotou statického prierného napätia a sú / mohli by byť kratšie, ako by sme si mohli naivne myslieť.

5. Schrodingerova rovnica

(a) S tvarom Schrodingerovej rovnice ste sa zoznámili už v Úvode do modernej fyziky. Napíšte časovú Schrodingerovu rovnicu pre jednu časticu v potenciálovom poli, v ktorej vyjadríte, čomu je rovný hamiltonián.

(b) Určte na základe čoho možno ľahko tvrdiť, že je to nerelativistická rovnica.

6. častica na úsečke a relativita

(a) Pre časticu na úsečke ste sa v Úvode do modernej fyziky stretli s tým, že jej energetické hladiny boli kvantované. Aký vzťah pre ne platil pri známej hmotnosti častice a dĺžke úsečky? Ako závisela energia n -tej hladiny od kvantového čísla n ?

(b) Uvažujme elektrón viazaný na úsečke atómových rozmerov. Je takýto elektrón v základnom stave relativistickou alebo nerelativistickou časticou?

(c) Približne pre aké veľké n , teda v akom vysokom excitovanom stave je už elektrón relativistický? Možno od tohto n veriť veľkosti energetických hladín? Prečo nie?

7. elektrón v atóme vodíka a relativita

(a) Ako závisia od n energetické hladiny viazaných stavov elektrónu v atóme vodíka?

(b) Stáva sa elektrón viazaný v atóme vodíka od nejakého n relativistickou časticou? Ak áno, približne aká hodnota n to je? Ak nie, prečo nie?

(c) Uvažujme elektrón v elektrostatickom potenciálovom poli od protónu, ktorý aproximujeme ako nekonečne ťažký. Môže mať elektrón kladnú energiu v tejto sústave?

Môže sa stať, že takúto sústavu treba opisovať ako relativistickú?

Nemáme tu na mysli drobné relativistické korekcie užitočné pri veľmi presných meraniach tzv. jemnej štruktúry energie elektrónu v najnižších viazaných stavoch.

8. kontrakcia dĺžky v relativite

(a) Akým faktorom sa skracuje dĺžka objektu, ktorý sa pohybuje voči pozorovateľovi rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla?

(b) Akým faktorom sa zväčší energia častice voči jej pokojovej energii mc^2 , ak sa častica pohybuje voči pozorovateľovi rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla?

(c) Uvažujme protóny urýchlené na LHC na max energiu 7 TeV. My meriame, že tunel LHC je dlhý 27 km. Pre protón (resp. pre trpaslíka sediaceho na protóne) je protón v pokoji a v pohybe je tunel. Ako dlhý je tunel LHC pre spomínaného trpaslíka?

(d) Rýchlosť, s akou sa pohybuje tunel pre uvažovaného trpaslíka je už prakticky rovná rýchlosti svetla. Lebo aj pre laboratórnu sústavu idú protóny už prakticky rýchlosťou svetla. Aký čas nameria trpaslík pre dobu jedného obehu na LHC? Je to ten istý čas, ako my meriame pre dobu obehu v laboratórnej sústave?