

Príklady 2 na cvičenie z kvantovej teórie // prvý týždeň

22.-26.9.2025

Fundamentálne konštanty

Kvantová teória sa na atómovej úrovni vymyká našej intuícii. Pre jej matematický opis je potrebné zvládnuť nový aparát, nový v porovnaní s klasickou fyzikou opisujúcou *makroskopické* objekty.

Sú to predovšetkým komplexné čísla, vlastnosti komplexných funkcií, operátory pôsobiace na tieto funkcie. Ale sú to aj fundamentálne konštanty a prirodzené jednotky *mikrosveta*. Nemôžeme napr. očakávať, že meter tu bude skvelá dĺžková jednotka. Alebo Joule na vyjadrenie malého počtu kvánt energie.

Začneme s fundamentálnymi konštantami, ktoré môžu mať strašidelné hodnoty, ak sú vyjadrené v SI sústave. To je nevhodné pre rýchle číselné odhady "na prstoch" či "on the back of an envelope".

Nasledujúce príklady nám pomôžu práve v týchto rýchlych odhadoch.

1. fundamentálne konštanty

K fundamentálnym **rozmerným** konštantám nášho sveta patria Planckova konštantka $\hbar$, rýchlosť svetla vo vákuu c a Newtonova gravitačná konštantka κ . (Planckovu konštantu budeme používať tú preškrtnutú. Čo znamená preškrtnutie?)

Sú to ďalej hmotnosť elektrónu (bola minule), o ktorej nemáme ani poňatia, prečo je taká, ako meriame v našom svete. A hmotnosti iných elementárnych častíc, ako sú mión, top kvark alebo Higgsov bozón. Poznámka: veríme, že tieto hmotnosti raz vysvetlíme skôr ako hodnoty $\hbar$, c a κ .

Možno povedať, že hodnoty $\hbar$, c a κ špecifikujú náš svet spomedzi iných možných svetov. Tak tomu dnes rozumieme. Vieme si predstaviť iný vesmír, kde by mali tieto konštanty iné hodnoty a taký svet iné fyzikálne zákony, ... napr. samotné elektróny by mohli tvoriť viazané stavy, ak by bola gravitačná sila medzi nimi väčšia ako odpudivá elektrostatická sila.

(a) Táto otázka je na pamäť a nie na porozumenie, ale aj pamäť potrebujeme vo fyzike.

Akú hodnotu, približne (na jedno platné miesto) má $\hbar$ v SI sústave? A v akých je jednotkách (s použitím Joulu, resp. mocnín m, kg, s, ...)? Aká fyzikálna veličina je vyjadrená v rovnakých jednotkách - je to (i) moment zotrvačnosti, (ii) moment sily, (iii) moment hybnosti?

(b) Akú hodnotu, približne (na jedno platné miesto) má c v SI sústave?

Rýchlo odhadnite čas, za ktorý k nám príde svetlo zo Slnka vzdialeného 150 miliónov kilometrov.

Čo by ste odpovedali na otázku (patrí do relativity), aký čas by to bol pre trpaslíka sediaceho na fotóne?

(c) Akú hodnotu, približne (na jedno platné miesto) má κ v SI sústave?

Rýchlo odhadnite, zhruba akou gravitačnou silou (v Newtonoch) pôsobia na

seba elektrón a protón v neutrálnom atóme vodíka. A ako silno sa gravitačne priťahujú dva elektróny na rádovo rovnakej vzdialenosti? *Tieto otázky budú mať pokračovanie v príklade 4.*

2. rozmerné fundamentálne konštanty

(a) Na internete dnes ľahko nájdete hodnoty v SI sústave na veľa platných miest: $\hbar = 1.054571800 \times 10^{-34} \text{ Js}$, $h = 6.582119514 \times 10^{-16} \text{ eV s}$, $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$ a $\kappa = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$.

Overte za pomoci kalkulačky (výnimočne), že s veľkou presnosťou platí rovnosť $\hbar c = 2000 \text{ eV } 10^{-10} \text{ m}$, kde 10^{-10} m je jeden angstrom, typická vzdialenosť sveta atómov.

Akej nepresnosti sa dopúšťame používaním tejto hodnoty pre $\hbar c$?

(b) Ak ste hotoví, overte teraz už bez pomoci kalkulačky, že s rovnakou dobrou presnosťou platí $\hbar c = 200 \text{ MeV fm}$, kde fm je jeden fermi rovný 10^{-15} m . Jeden fermi je typický rozmer (vzdialenosť) sveta atomových jadier.

Dôležitá poznámka: Tieto hodnoty pre $\hbar c$ si treba pamätať a používať.

3. bezrozmerné fundamentálne konštanty

Určite Vám napadlo, že sme nič nepovedali o fundamentálnej konštante e , elementárnom náboji. Pre nás bude vždy $e > 0$, takže je to náboj protónu či pozitronu. Náboj elektrónu je potom $-e$.

(a) Aká je hodnota e v SI sústave?

(b) Koľko Joulov je potom jeden elektrónvolt eV ?

(c) Vychádzajúc z SI sústavy ukážte, že kombinácia konštánt $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$ je bezrozmerná. Treba k tomu rozmer ϵ_0 v SI sústave.

(d) Uvedenú bezrozmernú kombináciu označujeme ako α . Voláme ju konštanta jemnej štruktúry (dôvod na toto pomenovanie bude jasný až v letnom semestri) a budeme ju používať namiesto škaredého $e^2/(4\pi\epsilon_0)$, a to tak, že túto škaredú kombináciu rozšírime v čitateli i menovateli faktorom $\hbar c$. Bude preto dôležité pamätať si túto bezrozmernú konštantu. Každý fyzik na našej planéte vie, že s dobrou presnosťou $\alpha = 1/137$. Presvedčte sa, že je to naozaj tak.

4. bezrozmerné fundamentálne konštanty

(a) V príklade 1.(c) ste odhadovali gravitačnú silu medzi protónom a elektrónom v atóme vodíka a medzi dvomi elektrónmi na rádovo rovnakej vzdialenosti. Porovnajte odhadnutú gravitačnú príťažlivú silu s coulombovskou elektrostatickou silou pre uvedené sústavy. O koľko rádov je väčšia elektrostatická sila? Možno gravitačné pôsobenie zanedbať?

(b) Premyslite si, čo by sa stalo na povrchu Zeme, ak by sa v absolútnej hodnote líšili elektrické náboje protónu a elektrónu o maličké $\epsilon = (e_p - e_e)/e_p$. Ako veľké by mohlo byť ϵ , aby sme v našom svete na povrchu Zeme nepozorovali elektrické javy vďaka elektricky nabitej Zemi? *Keďže by sa v nej nevykompenzovali náboje elektrónov a protónov. Atómy by tak boli máličko nabité.*

5. odvodenie typického rozmeru atómu a jeho typickej energie

Uvažujme jednoduchú sústavu elektrón viazaný (pripútaný) k protónu. Protón je zhruba 2000-krát ťažší, preto ho budeme považovať za nekonečne ťažký a teda nehybný. Je "zaklincovaný" v počiatku súradnicovej sústavy. Vo zvyšku príkladu pôjde o elektrón a nezávislou premennou bude jeho vzdialenosť od protónu r .

(a) Napíšte vzťah pre potenciálnu energiu elektrónu v závislosti na r . Je kladná alebo záporná?

(b) V opísanej jednoduchej sústave bude neurčitosť hybnosti Δp_x rádovo rovná samotnej hybnosti p_x a tá je rádovo rovná typickej celkovej hybnosti elektrónu p . Podobne neurčitosť polohy elektrónu bude Δx , rádovo rovná typickej hodnote x a rádovo rovná r (typickej hodnote). Odhadnite kinetickú energiu elektrónu vďaka princípu neurčitosti $\Delta p_x \approx \hbar/\Delta x$ a predchádzajúcim rádovým úvahám. Ak použijeme nerelativistický vzťah pre energiu, máme zaručené, že nakoniec vyjde typická energia oveľa menšia ako $m_e c^2$?

(c) Graficky načrtnite do jedného obrázku, ako od r závisí E_{pot} a ako E_{kin} . Kedy dominuje prvá a kedy druhá? Načrtnite graf závislosti celkovej energie od r .

(d) Nakoniec deriváciou nájdite minimum celkovej energie, ktoré budeme volať E_{ATOM} a tomu odpovedajúcu vzdialenosť elektrónu od protónu r_{ATOM} .

6. typický rozmer atómu

(a) Použite hodnotu $\hbar c$ a hodnotu α pri výpočte veličiny $\hbar/(m_e c \alpha)$, ktorá vychádza ako rádový odhad pre typický rozmer atómu r_{ATOM} .

Urobte to **bez kalkulačky**. Začnite násobením čitateľa aj menovateľa konštantou c .

(b) Keďže je táto veličina významná, má aj osobitné meno. Viete si spomenúť, ako sa volá?

(c) Presvedčte sa, že veličina $\hbar/(m_e c \alpha)$ naozaj vychádza v SI sústave v jednotkách dĺžky, teda v metroch.

7. typická väzbová energia atómu

Tento príklad nadväzuje na predchádzajúce.

(a) Čomu vychádza rovná typická energia atómu E_{ATOM} ? Vypočítajte v jednotkách eV, čomu sa rovná, vychádzajúc z hodnoty $m_e c^2$. Na delenie so 137^2 sa teraz zide kalkulačka.

(b) Okomentujte, či je v poriadku, že E_{ATOM} vychádza záporná.

(c) Okomentujte, či bolo v poriadku, že sme pre $E(r)$ použili nerelativistický vzťah.

(d) E_{ATOM} je presne aj energia základného stavu elektrónu v atóme vodíka. Okomentujte, či to tak muselo vyjsť, alebo je to len čistou zhodou náhod nášho rádového odhadu.

8. typická vzdialenosť v našom svete z rozmerovej analýzy

V príkladoch **1.** a **2.** tejto sady sme uviedli numerické hodnoty v SI sústave troch fundamentálnych rozmerných konštánt nášho sveta. Určte na základe rozmerovej analýzy, aký z nich vychádza typický rozmer (vzdialenosť) v našom svete a aká vychádza typická energia nášho sveta.

Dostávajú zhodu s r_{ATOM} a E_{ATOM} ?

Ak nie, čo je zdrojom veľkého rozdielu?

To, čo ste tu vypočítali sú Planckova vzdialenosť a Planckova energia.

9. rozmerová analýza ešte raz

Výsledky pre E_{ATOM} a r_{ATOM} nie sú v úplnom rozpore s výsledkami z rozmerovej analýzy pomocou konštánt $\hbar$, c a m_e . Dokážte toto tvrdenie tým, že túto analýzu tu odvodíte: vychádzajúc zo vzťahov $E_{ATOM} = \hbar^x c^y m_e^z$ a

podobne pre r_{ATOM} **vypočítate** (a nie uhádnete) mocniny x , y a z .
Všimnite si, že z rozmerovej analýzy však nie je možné odvodiť, akým spôsobom vystupuje vo výsledkoch bezrozmerná konštanta α , ktorá úzko súvisí s coulombovským priťahovaním elektrónu k jadru. Keďže α nie je rádovo 1 (a vynechanie coulombovskej interakcie pri odhade E_{ATOM} a r_{ATOM} je divné), rozmerová analýza vychádzajúca iba z konštánt $\hbar$, c a m_e nedáva spoľahlivé rádové odhady pre energiu a rozmer atómu. Iným dôvodom, prečo ich nedáva, je, že sme do rozmerovej analýzy zapojili konštantu c , čo nie je v súlade so zdravým sedliackym rozumom pre nerelativistickú teóriu. Rozmerová analýza dá spoľahlivé odhady, ak sa namiesto c uvažuje iná konštanta, napr. $e^2/(4\pi\epsilon_0)$. Zopakujte ju s touto zámenou.