

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.3

riešenia, prosím, odovzdajte do 15:00 dňa 30.03.2026

1. Coulombov rozptyl alfa častice na guli s konštantným potenciálom

Na prednáške sme predviedli výpočet formfaktoru pre jadro v tvare gule s homogénne rozloženým nábojom. Matematicky sme vypočítali Fourierov obraz konštantnej (nenulovej) funkcie v guli a rovnej nule mimo gule. Rovnaký integrál, teda matematicky ten istý Fourierov obraz, treba počítať pre amplitúdu rozptylu alfa častice na konštantnom potenciáli v konečnej guli, pričom $V = 0$ mimo gule. Určte - už bez počítania integrálu - diferenciálny účinný prierez pre tento rozptyl.

Mohli by byť v priestore smery, do ktorých sa alfa častice nerozptyľujú? **[2 body]**

2. sférické Besselove funkcie $j_\ell(x)$ a $n_\ell(x)$

Funkciám $j_\ell(x)$ a $n_\ell(x)$ sa venujeme preto, že sú to radiálne časti riešenia bezčasovej SchR pre voľnú časticu. Pre rozptyl pomocou parciálnych vln potrebujeme rozklad rovinnej vlny (v celom priestore) do sférických vln, a v ňom vystupujú $j_\ell(x)$.

(a) Načrtnite grafy funkcií $j_\ell(x)$, pre $\ell = 0, 1, 2, 3$. Dôraz dajte na hodnotu v nule, počet priesečníkov s osou x a asymptotické správanie pre $x \gg 1$.

(b) Na prednáške sme overili, že $j_0(x) = \sin x/x$ je naozaj riešením SchR. Overte, že aj $n_0(x) = -\cos x/x$ vyhovuje SchR.

(c) Prečo sa $n_0(x)$, ani vyššie $n_\ell(x)$ nenachádzajú v rozklade rovinnej vlny do sférických vln?

(d) Na prednáške sme bez dôkazu uviedli, že asymptoticky (pre veľké r , resp. $x = qr$) je $j_\ell(x)$ približne rovná $\frac{1}{x} \cos(x - (\ell + 1)\frac{\pi}{2})$. Podobne $n_\ell(x)$ je približne $\frac{1}{x} \sin(x - (\ell + 1)\frac{\pi}{2})$. Overte, že tomu je naozaj tak pre $\ell = 0$.

(e) Použitím integrálneho vzťahu overte, že $j_1(x) = \frac{1}{x^2}(\sin x - x \cos x)$. Overte zároveň, že pre $j_1(x)$ platí asymptotický vzťah uvedený v časti (d). **[5 bodov]**

3. Greenova funkcia s okrajovou podmienkou pre zbiehavú vlnu

Odvodte Greenovu funkciu pre SchR $(\Delta + q^2)\Psi(\vec{r}) = f(\vec{r})$, pričom póly odsuňte na opačnú stranu od reálnej osi voči postupu na prednáške. Akú okrajovú podmienku v limite $r \rightarrow \infty$ spĺňa táto Greenova funkcia?

Funkcia $f(\vec{r})$ spomenutá vyššie nie je pre riešenie tejto otázky dôležitá. Pre úplnosť uveďme, že bolo $f(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2}V(\vec{r})\Psi(\vec{r})$.

Pripomeňme, že póly posúvame o $|\varepsilon| \ll 1$ pri integrácii v komplexnej rovine hybnosti k , keď počítame Greenovu funkciu v súradnicovom priestore z jej Fourierovho obrazu.

[2 body]

4. Rutherfordov rozptyl

Na prednáške sme pripomenuli, že v klasickej fyzike vyriešime Rutherfordov rozptyl alfa častice na Coulombovom potenciáli od jadra zlata získaním vzťahu $b(\theta) = \frac{D}{2} \frac{1}{\tan \theta/2}$. D je najbližšia vzdialenosť od jadra pri čelnom náraze. V rýchlosti sme predviedli, ako zo vzťahu $d\sigma = 2\pi b db$ vyplýva diferenciálny účinný prierez úmerný $(\sin \frac{\theta}{2})^{-4}$.

Z Bornovej aproximácie sme potom v kvantovej mechanike odvodili pre Rutherfordov rozptyl (diferenciálny účinný prierez) tú istú závislosť na uhle θ .

Dokážte, že diferenciálny účinný prierez vychádza rovnaký, aj vrátane konštánt stojacich pred citovanou uhlovou závislosťou. **[2 body]**

5. Rutherfordov rozptyl

Uvažujme odrazené alfa častice v Rutherfordovom rozptyle na Coulombovom potenciáli. Určte pomer medzi počtom častíc odrazených do uhla θ z intervalu $(\pi/2, 3\pi/4)$ a do uhla z intervalu $(3\pi/4, \pi)$. Pred výpočtom si tipnite, ako veľký by ste odhadovali tento pomer. **[2 body]**

6. Rutherfordov rozptyl na tienenom potenciáli

Na prednáške sme navrhli vyšetrovať rozptyl na tienenom Coulombovom potenciáli. Štartujúc z prednášky dopočítajte jeho celkový účinný prierez a vo výsledku *okomentujte* limitu (i) $\mu \rightarrow 0$, teda netienený potenciál, a limitu (ii) $\mu \rightarrow \infty$. **[2 body]**

7. rozptyl pomocou rozkladu do parciálnych vĺn

(a) Pri opise rozptylu pomocou rozkladu do parciálnych vĺn sa zistilo, že rozptyl prebieha iba v s vlne. Fázový zdvih je $\delta_0 = \pi/2$ pre všetky experimentálne dostupné q . Určte diferenciálny aj celkový účinný prierez pre tento rozptyl. Do ktorého smeru sa bude rozptylovať najviac častíc?

(b) Overte, že je splnená optická teoréma. **[2 body]**

8. poruchový rozvoj a optická teoréma

Overte, že je splnená optická teoréma pre tienенý Coulombov potenciál z príkladu 6. **[2 body]**