Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.5

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky dňa 12.05.2026

1. *časovo závislá poruchová teória*
Uvažujme nabitý JHO v homogénnom elektrickom poli v smere kmitov (strednej hodnoty) JHO, teda ako na prednáške s rozdielnym časovým priebehom $f(t) = 0$ pre $t < 0$ a $f(t) = e^{-t/\tau}$ pre $t > 0$. JHO je pred zapnutím tejto poruchy v základnom stave.

(a) Podobne ako na prednáške určte do prvého rádu poruchovej teórie v akých excitovaných stavoch sa môže nachádzať JHO po odznení poruchy. Vypočítajte pravdepodobnosť tejto excitácie pri fixovanom τ.

(b) Prediskutujte Váš výsledok v limite malého a veľkého τ. Podobne ako na prednáške preskúmajte, či existuje konečné nenulové τ_{Max}, pre ktoré je pravdepodobnosť excitácie maximálna. Pre maximálnu pravdepodobnosť okomentujte, či môže byť v prípade silného poľa táto pravdepodobnosť väčšia než 1. **[2 body]**

2. *časovo závislá poruchová teória*
Tento príklad nadväzuje na predchádzajúci príklad. Ak ste s jeho riešením hotoví, získali ste výsledok v prvom ráde poruchovej teórie.

(a) Je možná excitácia JHO do druhého excitovaného stavu vo vyššom ráde poruchovej teórie? Odpoveď vysvetlite.

(b) Je možná excitácia zo základného stavu na tretiu excitovanú hladinu? Približne rádovo, pre $\tau = \tau_{Max}$, ako sú pravdepodobnosti excitácie na *druhú* a *tretiu* excitovanú hladinu potlačené voči excitácii na *prvú* excitovanú hladinu?

(c) Poruchová teória v rozvoji do prvého rádu nám umožňuje počítať aj amplitúdu pravdepodobnosti JHO zotrvať na základnej hladine po odznení poruchy. Ukážte, že táto pravdepodobnosť je rovná 1. Na prvý pohľad dostávame rozpor s tým, že suma všetkých pravdepodobností (zotrvať, aj preskakovať) má byť rovná jednej a nám vychádza hodnota väčšia než 1. Ako vysvetlíte tento paradox? **[3 body]**

3. *matematický formalizmus*
Uvažujme časticu na úsečke a testujme Hilbertov priestor daný všetkými možnými kvadraticky integrovateľnými komplexnými funkciami na úsečke, ktoré sú nulové na krajoch. Vysvetlite, prečo to nie je Hilbertov priestor. Pomôcka bola daná na prednáške. **[2 body]**

4. *matematický formalizmus*
(a) Vysvetlite na základe prednášky, prečo nie je na úsečke jeden hermitovský operátor hybnosti.

(b) Vysvetlite na základe prednášky, prečo *je* jeden hermitovský operátor hybnosti pre časticu na celej reálnej osi.
Pomôcka: jeho definičný obor sú všetky diferencovateľné funkcie z Hilbertovho priestoru. Hilbertov priestor tvoria všetky kvadraticky integrovateľné komplexné funkcie. Nevadí, že tento operátor hybnosti nemá vlastné funkcie z uvedeného Hilbertovho priestoru.

(c) Nadväzujúc na *(b)*, máme na uvedenom Hilbertovom priestore hermitovský hamiltonián pre voľnú časticu?

(d) Nadväzujúc na *(b)* a *(c)*, okomentujte, či možno pre voľnú časticu na reálnej osi napísať rovnosť $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$. **[4 body]**

5. *projektory*
(a) Na prednáške sme pre Hilbertov priestor $\mathcal{H}$ troj-komponentných komplexných vektorov predstavili projektor P_1 rovný 3x3 matici so samými jednotkami násobenej číslom $\frac{1}{3}$. Uvažovali sme ďalšie dva projektory projektujúce na ortogonálne podpriestory $\mathcal{H}$, všetky tri projektory dali v súčte jednotkovú maticu - vyplýva to z ich vzájomnej ortogonality a úplnosti. Navrhli sme P_2 s riadkami $(1\,0\,-1)$, $(0\,0\,0)$ a $(-1\,0\,1)$, násobený číslom $\frac{1}{2}$. Dopočítajte P_3 (bol na prednáške).

(b) Navrhnite inú dvojicu projektorov P_2 a P_3 k pôvodnému P_1. Všetky tri by mali dať v súčte jednotkovú maticu a mali by projektovať na vzájomne ortogonálne podpriestory $\mathcal{H}$. **[2 body]**

6. *časový vývoj v rôznych obrazoch*
Pripomeňte si z prednášky tri obrazy časového vývoja v kvantovej mechanike. Napíšte, ako sa v Schrodingerovom obraze vyvíjajú stavy a ako operátory.

Napíšte, ako sa v Heisenbergovom obraze vyvíjajú stavy a ako operátory.

Napíšte, ako sa v interakčnom obraze vyvíjajú stavy a ako operátory.

Napíšte, čo sa stane s interakčným obrazom pri vypnutí poruchy $\hat{H}'$. **[2 body]**

7. *k tretiemu motivačnému príkladu, na čo je dobrá matica hustoty*
Uvažujme zväzok elektrónov, ktoré pochádzajú z rozpadov bezspinových častíc na elektrón a pozitrón. Pripomeňme, že po rozpade je sústava v stave $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,|\uparrow\rangle\,|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\,|\uparrow\rangle\,]$, kde prvý spinový stav je elektrónový a druhý pozitrónový. Pozitróny nedetekujeme. Na prednáške sme predviedli (zrýchlený) výpočet $\overline{S}_z = 0$ pre elektróny. Dopočítajte $\overline{S}_x$ a $\overline{S}_y$ pre elektróny. Po každé by opäť mala vyjsť nula. **[2 body]**

8. *matica hustoty*
Aká matica hustoty popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku v predchádzajúcom príklade? Odpoveď vysvetlite. Je tento spinový stav čistým stavom alebo je zmesou?
[2 body]

9. *matica hustoty*
Uvažujme zdroj elektrónov emitujúci zväzok čiastočne polarizovaných elektrónov, každý tretí so spinom v smere "dolu" voči osi z zatiaľ čo prvé dva sú so spinom "hore" voči osi z. Aká matica hustoty ρ popisuje spinový stav elektrónu vo zväzku? Odpoveď vysvetlite.
Pre čistý stav, na rozdiel od zmesi, platí $\rho^2 = \rho$. Pomocou tohto kritéria rozhodnite, či je spinový stav elektrónu v uvedenom zväzku čistým stavom alebo či je zmesou.
[2 body]