Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie 2

Sada č.6

riešenia, prosím, odovzdajte do 15:00 hod dňa 01.06.2026

1. *matica hustoty*
Uvažujme zväzok elektrónov prechádajúci cez Sternov-Gerlachov prístroj $\mathrm{SG}_{\vec{n}}$. Zamerajme sa na elektróny, ktoré vychádzajú z prístroja so spinom hore voči osi $\vec{n}$.

(a) Odvoďte maticu hustoty pre spinový stav týchto elektrónov. *Pomôcka: ide o maticové elementy operátora hustoty* $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ *v báze stavov "hore" a "dolu" voči osi z (to je "spinorová reprezentácia"), kde* $|\Psi\rangle$ *je spinový stav elektrónu. Spinor odpovedajúci stavu* $|\Psi\rangle$ *poznáme z minulého semestra a je to* $\Psi = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{+i\varphi/2} \end{pmatrix}$. Váš výsledok vyjadrite pomocou vektora $\vec{n} = (n_x,\, n_y,\, n_z)$ a nie uhlov θ a φ.
Uveďte tvar matice ρ v špeciálnych prípadoch, keď je SG prístroj natočený tak, že výnimočný smer jeho magnetického poľa je v smere *(i)* osi z, *(ii)* proti smeru osi z, *(iii)* v smere osi x.

(b) Aká matica hustoty odpovedá nepolarizovanému zväzku elektrónov? Metódou pozriem a vidím okomentujte, prečo vidíte, že neexistuje smer $\vec{n}$ (z časti *(a)*), ktorý by dal túto maticu hustoty.
Čistý stav, ktorý dostávame z SG prístroja, je teda niečo kvalitatívne iné ako nepolarizovaný zväzok, napr. zo žeravenej katódy, keď je spinový stav zmesou.

(c) Ukážte, že pre všeobecný smer $\vec{n}$ z časti *(a)* matica hustoty spĺňa vlastnosti *(i)* je hermitovská, *(ii)* jej stopa je 1, *(iii)* platí $\rho^2 = \rho$.

(d) Ktoré z vlastností menovaných v časti *(c)* spĺňa / nespĺňa matica hustoty pre nepolarizovaný zväzok? **[5 bodov]**

2. *matica hustoty*
(a) Ako sa vypočíta stredná hodnota (spinovej) veličiny A pri známej matici hustoty?

(b) Uvažujme zväzok elektrónov, ktorý opúšťa prístroj $\mathrm{SG}_{\vec{n}_1}$ so spinom hore voči smeru $\vec{n}_1$ a vzápätí prechádza prístrojom $\mathrm{SG}_{\vec{n}_2}$. Aká je predpoveď pre výsledok merania strednej hodnoty $\overline{S_{\vec{n}_2}}$ týmto druhým SG prístrojom, vychádzajúc z odpovede v časti *(a)*?

(c) Pokračovanie časti *(b)*: V zimnom semestri ste odvodzovali vzťah $P(\uparrow_{\vec{n}_2}) = \frac{1}{2}\,(1 + \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$. Výsledok *(b)* znamená, že poznáme hodnotu $\frac{\hbar}{2}P(\uparrow_{\vec{n}_2}) + \frac{-\hbar}{2}P(\downarrow_{\vec{n}_2})$. Zároveň platí $P(\uparrow_{\vec{n}_2}) + P(\downarrow_{\vec{n}_2}) = 1$. Overte z toho výsledok pre $P(\uparrow_{\vec{n}_2})$ zo zimného semestra. **[3 body]**

3. *rotácie*
Uvažujme operátor $\hat{T}_\alpha = e^{-\alpha\frac{\partial}{\partial\varphi}}$. Vychádzajúc z Taylorovho rozvoja exponenciály, čomu je rovné $\hat{T}_\alpha\, \Psi(r,\, \theta,\, \varphi)$?

A čomu je potom rovné $e^{-i\alpha\hat{L}_z/\hbar}\,\Psi(r,\,\theta,\,\varphi)$? Je tento operátor operátorom rotácie v priestore vlnových funkcií? *Pomôcka: použite vyjadrenie $\hat{L}_z$ vo sférických premenných.* **[2 body]**

4. *elementárne vlastnosti hermitovských operátorov*
(a) Dokážte, že pre ľubovolný hermitovský operátor $\hat{A}$ je operátor $\hat{U} = e^{i\hat{A}}$ unitárny.

(b) Tvrdenie *(a)* zjavne platí aj pre NxN matice A a U. Uvažujme teraz ľubovolnú NxN hermitovskú maticu A *s nulovou stopou.* Dokážte, že determinant unitárnej matice $U = e^{iA}$ je rovný 1.
Poznámka: pre Tr{A}$\neq 0$ by mohol byť rovný komplexnému číslu s absolútnou hodnotou rovnou 1, čiže nejakej komplexnej fáze. Pre Tr{A}$= 0$ je táto fáza rovná nule.

Návod: po rozvinutí e^{iA} do radu využite vzťah $A = VA^{diag}V^\dagger$ pre každú A v rozvoji, kde A^{diag} je diagonálna. Unitárne matice V sa skoro všetky vzájomne vykrátia, ostane len jedna V vyňatá naľavo a jedna $V^\dagger$ vyňatá napravo. Rad medzi nimi možno sčítať, sčitujú sa len diagonálne elementy, súčet n-tých diagonálnych elementov dá $e^{i\lambda_n}$, kde λ_n je n-tá vlastná hodnota matice A, resp. $\lambda_n = A^{diag}_{nn}$. Potom už $\det U = \det V \det e^{iA^{diag}} \det V^\dagger$, keďže determinant súčinu matíc je rovný súčinu ich determinantov. Zrejme je potom $\det V^\dagger = \det V^{-1} = 1/\det V$ a to už je takmer tvrdenie dokázané, lebo (dokážte!) $\det e^{iA^{diag}}$ je rovné $e^{i\sum\lambda_n}$ a tá suma v exponente je nula, lebo stopa matice sa zachováva pri unitárnych transformáciách. **[3 body]**

5. *rotácia*
V tomto príklade uvažujme pre jednoduchosť iba rotáciu okolo osi z.

(a) Vychádzajme z príkladu **3.** a operátora rotácie $\hat{U}_z(\alpha) = e^{-i\alpha\hat{L}_z/\hbar}$, kde $\alpha > 0$. Hodnota vlnovej funkcie Ψ' po rotácii, sledujúc konkrétny vybraný uhol φ_0, je podľa príkladu **3.** rovná $\Psi'(r,\,\theta,\,\varphi_0) = \Psi(r,\,\theta,\,\varphi_0 - \alpha)$. Znamienko mínus v tomto vzťahu môže byť klamlivé. Akým smerom sme zarotovali nejakú prominentú črtu, napr. maximum, vlnovej funkcie?
Pomôcť si možno rotáciou vlnovej funkcie $\Psi = R(r)\,\Theta(\theta)\,\cos(\varphi - \varphi_0)$. Kam sa po rotácii dostane maximum? Znamená znamienko mínus vo vyjadrení Ψ' pomocou Ψ rotáciu "dozadu"?

(b) Uvažujme teraz vektorový operátor $\hat{\vec{r}}$, resp. iba jeho komponentu $\hat{x} = r\sin\theta\cos\varphi$. Na prednáške sme povedali, že rotáciou sa operátor $\hat{A}$ mení na $\hat{A}' = \hat{U}_z(\alpha)\,\hat{A}\,(\hat{U}_z(\alpha))^\dagger$, a to je (metódou pozriem a vidím) preto, že stredná hodnota $\overline{A}'$ má byť po rotácii rovnaká ako pred rotáciou $\overline{A}$. Predstavme si teraz namiesto $\hat{A}$ operátor $\hat{x}$. Ukážte, že rotáciou sa zmení na $\hat{x}'$ zarotovaný v zhode s rotáciou vlnovej funkcie v časti *(a)*.
Pomôcka: uvažujte pôsobenie už zarotovaného $\hat{x}'$ na ľubovolnú vlnovú funkciu $\chi(r,\,\theta,\,\varphi)$ a túto vlnovú funkciu v závere "zakryte". Tak určíte $\hat{x}'$ vo všeobecnosti pomocou komponent operátora $\hat{\vec{r}}$ pred rotáciou. **[2 body]**

6. *rotačný operátor v spinorovej reprezentácii*
Je pozoruhodné, že v spinorovej reprezentácii vieme presne vypočítať maticu repre-

zentujúcu rotačný operátor $\hat{U}_{\vec{n}}(\alpha)$, a to vďaka vlastnosti Pauliho matíc $\sigma_i^2 = 1$ (jednotková 2x2 matica) pre $i = x,\, y,\, z$, resp. $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$. *Tento druhý vzťah sa odvodí sčítaním komutátora a antikomutátora dvoch Pauliho matíc. Pri* δ_{ij} *sa automaticky predpokladá násobenie jednotkovou 2x2 maticou.*

(a) V spinorovej reprezentácii rozviňte maticu $U_{\vec{n}}(\alpha)$ do Taylorovho radu. Ukážte, že ho možno sčítať a výsledok je $U_{\vec{n}}(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\,\sin\frac{\alpha}{2}$, kde prvý člen automaticky predpokladáme násobený s jednotkovou 2x2 maticou.

(b) Čomu sa rovná matica $U_z(\alpha)$?

(c) Čomu sa rovná matica $U_z(\frac{\pi}{2})$?

(d) Do akého spinoru zarotuje spinor "hore" voči osi x, ak rotujeme okolo osi z o uhol 90^o? Dáva výsledok zmysel?

(e) Do akého spinoru zarotuje spinor "hore" voči osi x, ak rotujeme okolo osi z o uhol 180^o? Dáva výsledok zmysel?

(f) Do akého spinoru zarotuje spinor "hore" voči osi z, ak rotujeme okolo osi z o ľubovolný uhol? Dáva výsledok zmysel?

(g) Do akého spinoru zarotuje spinor "hore" voči osi y, ak rotujeme okolo osi x o uhol 90^o? Dáva výsledok zmysel?

(h) Do akého spinoru zarotuje spinor "hore" voči osi x, ak rotujeme okolo osi z o uhol 360^o ? Dáva výsledok zmysel? *Pomôcka: Nie, tu našej intuícii opačné znamienko zmysel nedáva, v bežnom živote očakávame zhodu po rotácii o* 360^o *. Extra mínus dostávame pri každej rotácii fermiónu o* 360^o *. Pri bozónoch je plus znamienko. Anyway, ide o nefyzikálnu celkovú fázu.* **[8 bodov]**

7. *matice J_x, J_y, J_z pre spin 1*
Na prednáške sme v rýchlosti vysvetlili, ako odvodiť matice reprezentujúce $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ a $\hat{J}_z$ v ľubovolnej ireducibilnej reprezentácii (irrep). Odvoďte tieto matice pre irrep $j = 1$. Ukážte, že spĺňajú komutačný vzťah $[J_x,\, J_y] = iJ_z$, prípadne na základe osobného nadšenia dobrovoľne overte aj ďalšie komutačné vzťahy.
Vypočítajte maticu J^2 a okomentujte, či vychádza to, čo má výjsť a či naozaj táto matica komutuje s každým J_i, $i = x,\, y,\, z$. **[2 body]**

8. *skladanie momentov hybnosti*
Na prednáške sme predviedli skladanie dvoch spinov $\frac{1}{2}$ a potom dvoch spinov 1. Tu teraz predveďte skladanie $j_1 = 1$ a $j_2 = \frac{1}{2}$. Určte najprv aké irreps sa nachádzajú v tenzorovom súčine $1 \otimes \frac{1}{2}$ a či sa Vám pritom zachováva počet stupňov voľnosti. Potom začnite stavom s "najvyššou váhou" $|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = |1\,1\rangle\,|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ a pokračujte znižovaním pomocou operátora $\hat{J}_- = \hat{J}_{1-} + \hat{J}_{2-}$.
Okomentujte, či dostávate zhodu so vzťahmi použitými pri analýze Zeemanovho javu v prvej polovici tohto semestra. Kúzelne sme vtedy bez odvodenia vyčarovali netriviálne rozklady stavov $|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{3}{2}\,\frac{-1}{2}\rangle$ a $|\frac{1}{2}\,\frac{-1}{2}\rangle$. **[3 body]**

9. *skladanie dvoch momentov hybnosti, význam CG koeficientov*
Na prednáške sme pri skladaní dvoch spinov $j_1 = 1$ a $j_2 = 1$ odvodili

$$|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1\ -1\rangle\,|1\,1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\,|1\,0\rangle\,|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|1\,1\rangle\,|1\ -1\rangle.$$

Uvažujme skutočne existujúcu časticu K^{*-}, tzv. K-star mezón, viazanú k atómovému jadru so spinom nula, napr. jadru hélia. K^{*-} je nestabilný a vystupuje tu len preto, že má spin 1. Vďaka zápornému náboju sa môže naviazať na kladne nabité jadro. Je to síce iba na chvíľu, kým sa K^{*-} nerozpadne, ale povedzme, že je to pre experiment dostatočne dlho, aby boli takéto atómy premerané podobne, ako bol premeraný atóm vodíka.
V uvažovanom atóme má K^{*-} mezón podobné viazané stavy, ako elektrón vo vodíku, vlastne v héliu. Tu je podstatné len to, že môže byť v stave s orbitálnym momentom hybnosti daným kvantovým číslom $\ell = 1$.
Uvažovaný (mimochodom ionizovaný) héliový atóm s K^{*-} mezónom namiesto elektrónu potom predstavuje realistický model skladania dvoch momentov hybnosti, každý rovný 1. Jeden od spinu a jeden od orbitálneho pohybu K^{*-} mezónu.

(a) Ak sme atómu odmerali celkový moment hybnosti $J = 2$ a jeho z-ový priemet $M = 0$, s akou pravdepodobnosťou nameriame následne priemet spinu K^{*-} na os z rovný nule? A s akou pravdepodobnosťou dá toto meranie hodnoty $+\hbar$ a $-\hbar$?

(b) Ak sme atómu odmerali celkový moment hybnosti $J = 1$ (a nie 2 ako v predchádzajúcej otázke) a jeho z-ový priemet opäť meriame $M = 0$, s akou pravdepodobnosťou teraz nameriame priemet spinu K^{*-} na os z rovný nule? A s akou pravdepodobnosťou dá teraz toto meranie hodnoty $+\hbar$ a $-\hbar$? **[3 body]**

10. *bonus príklad: vektorový súčin*
V tenzorovom súčine $j_1 \otimes j_2$, kde bolo $j_1 = 1$ a $j_2 = 1$, sme na prednáške našli ireducibilné reprezentácie s $J = 2$, $J = 1$ a $J = 0$. Ukázali sme, že pre $J = 0$ naozaj dostávame superpozíciu stavov, ktorá má v prípade dvoch vektorových polí rovnakú štruktúru (až na celkovú konštantu) ako skalárny súčin $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Táto štruktúra sa zjavne nemení pri rotáciách, ako sa nemení ani stav $|J\,M\rangle = |0\,0\rangle$. Na počudovanie je to v zhode s tým, že jeden z Clebsch-Gordanových koeficientov v rozklade $|0\,0\rangle$ je záporný a dva sú kladné.
Analogicky ukážte, že pre $J = 1$ máme naozaj superpozície stavov, ktoré sa pri rotáciách transformujú rovnako ako komponenty vektorového súčinu, teda úmerne $(y_1z_2 - z_1y_2,\ z_1x_2 - x_1z_2,\ x_1y_2 - y_1x_2)$. **[2 body]**

11. *bonus príklad: skladanie dvoch spinov*
Ukážte, že vo všeobecnosti je pri rozklade tenzorového súčinu $j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \ \ldots \oplus |j_1 - j_2|$ zachovaný počet stupňov voľnosti. **[2 body]**