

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.1

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 6.10.2026

1. Fundamentálne konštanty

K fundamentálnym **rozmerným** konštantám nášho sveta patria Planckova konštanta $\hbar$, rýchlosť svetla vo vákuu c a tiež Newtonova gravitačná konštanta κ (niekedy aj G_N). (*Planckovu konštantu budeme používať preškrtnutú: $\hbar = h/2\pi$.*)

Sú to ďalej hmotnosť elektrónu, o ktorej nemáme ani poňatia, prečo je taká, ako meriame v našom svete. A hmotnosti iných elementárnych častíc, ako sú mión, top kvark alebo Higgsov bozón. (*Veríme, že vysvetlíť tieto hmotnosti je ľahším orieškom ako vysvetlenie pre hodnoty $\hbar$, c a κ .*)

A je tu aj zopár **bezrozmerných** fundamentálnych konštánt ako napr. konštanta jemnej štruktúry α , ktorá je zobchodovaná za náboj protónu e . (Porozumenie odkiaľ sa berie jej hodnota plus hodnoty $\hbar$ a c bude znamenať aj porozumenie hodnote e .) Možno povedať, že hodnoty $\hbar$, c a κ špecifikujú náš svet spomedzi iných možných svetov. Tak tomu dnes rozumieme. Vieme si predstaviť iný vesmír, kde by mali tieto konštanty iné hodnoty a taký svet iné fyzikálne zákony, ... napr. samotné elektróny by mohli tvoriť viazané stavy, ak by bola gravitačná sila medzi nimi väčšia ako odpudivá elektrostatická sila.

(a) Aká fyzikálna veličina je vyjadrená v rovnakých jednotkách ako $\hbar$? Je to (i) moment zotrvačnosti, (ii) moment sily, (iii) moment hybnosti?

(b) Rýchlo odhadnite čas v minútach, za ktorý k nám príde svetlo zo Slnka vzdialeného 150 miliónov kilometrov.

Čo by ste odpovedali na otázku (patrí do relativity), aký čas by to bol pre trpaslíka sediaceho na fotóne?

(c) Akú hodnotu, približne (na jedno platné miesto) má κ v SI sústave? Rýchlo odhadnite, zhruba akou gravitačnou silou (v Newtonoch) pôsobia na seba elektrón a protón v neutrálnom atóme vodíka. Aký je pomer gravitačnej a elektrostatickej sily medzi nimi? **[3 body]**

2. fundamentálne konštanty $\hbar$, c a κ

(a) Rozmerovou analýzou nájdite, aké mocniny konštánt $\hbar$, c a κ dajú v kombinácii rozmer dĺžky. Akej veľkosti je táto (*Planckovská*) dĺžka? (*Odhadnite ju na jedno platné miesto*).

(b) Rozmerovou analýzou nájdite, aké mocniny konštánt $\hbar$, c a κ dajú v kombinácii rozmer energie. Akej veľkosti je táto (*Planckovská*) energetická škála? (*Odhadnite ju na jedno platné miesto*).

(c) Okomentujte, ako dobre sedia Vaše výsledky s typickým rozmerom atómov r_{ATOM} a ich typickou väzbovou energiou E_{ATOM} ?

Dala sa očakávať zhoda, keď sme zahrnuli do našich úvah konštantu κ ? **[2 body]**

3. nerelativistická vs. relativistická častica

(a) Elektrón je z pokoja urýchlený potenciálovým rozdielom 1 V a ďalej letí voľný (t.j. bez prítomnosti vonkajšieho poľa). Akú má energiu? (*Použite priateľské jednotky, a nie SI.*)

Vypočítajte de Broglieho vlnovú dĺžku λ tohto elektrónu. *Odpovedzte bez použitia kalkulačky, vhodným rozšírením zlomku pre λ obetujúc presnosť pár percent; ziskom je dobrý pocit z víťazstva zdravého rozumu nad tlačítkami kalkulačky.*

(b) Ako sa škáluje vypočítaná λ voči potenciálovému rozdielu? Bez počítania určte len na základe výpočtu v časti (a) de Broglieho vlnovú dĺžku pre elektrón urýchlený z pokoja potenciálovým rozdielom 2-krát väčším, t.j. 2 V. Prípadne vo všeobecnosti k -násobne väčším.

(c) Možno analogicky k časti (b) určiť de Broglieho vlnovú dĺžku aj pre elektrón urýchlený z pokoja potenciálovým rozdielom miliónkrát väčším, t.j. 1 MV? Aká je vlnová dĺžka takéhoto elektrónu?

(d) Aká je vlnová dĺžka elektrónu urýchleného z pokoja potenciálovým rozdielom 1 GV? *Možno v riešení zanedbať $m_e c^2$ voči energii urýchleného elektrónu? Ak áno, tak to urobte.*

(e) Aká je vlnová dĺžka elektrónu urýchleného z pokoja potenciálovým rozdielom 2 GV? Vo všeobecnosti k GV? *Odpovedzte bez počítania len pomocou výsledku v (d).*

(f) Porovnajte škálovanie λ voči potenciálovému rozdielu ΔV v (e) so škálovaním v (b).

Prečo sa výsledok z časti (c) neškáluje ani podľa (b) ani podľa (e)? T.j. prečo v časti (c) nie je λ homogénnou funkciou ΔV ?

Škálovanie tu znamená, že λ je homogénna funkcia potenciálového rozdielu ΔV : pre potenciálový rozdiel ΔV zmenený na $k\Delta V$ je λ zmenený na $k^\alpha \lambda$. α je potom škálovací exponent, resp. stupeň homogenity. **[3 body]**

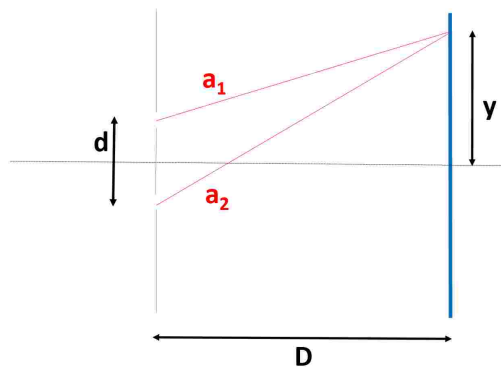
4. E_{ATOM} a r_{ATOM} v iných svetoch

(a) Predstavme si svet iný ako ten náš svet. Nech je v ňom hodnota fundamentálnych konštánt $\hbar$, c , e rovnaká ako v našom svete, ale hmotnosť elektrónu je odlišná. Aká by mala byť táto hmotnosť, aby v tomto svete boli atómy veľké ako melóny (myslíme melóny v našom svete)? *Odpoveď stačí na jedno platné miesto, zaujímavý je hlavne rádový rozdiel.*

(b) Aká by vtedy bola typická väzbová energia elektrónov v týchto melónových atómoch? Boli by pevnejšie viazané ako naše atómy? *Odpoveď stačí na jedno platné miesto, zaujímavý je hlavne rádový rozdiel.*

(c) Akej veľkosti by boli živé tvory podobne zložené z buniek ako u nás? Vychádzajme z potreby rovnakej komplexnosti, ako je to u živých tvorov na našej zemi.

(d) Ako by sa v inom svete musel zmeniť náboj elektrónu a protónu, aby boli atómy predsa len rovnakých rozmerov ako v našom svete? Bola by potom rovnaká aj väzbová energia atómov? **[2 body]**



5. limitné prípady k výsledkom pre r_{ATOM} a E_{ATOM}

(a) Vo výsledkoch pre r_{ATOM} a E_{ATOM} vystupuje rýchlosť svetla c . To zdanlivo vyzerá byť v rozpore s tvrdením, že elektrón možno uvažovať ako nerelativistický. V nerelativistickej fyzike konštanta c nevystupuje, nerelativistický opis dostávame z relativistického v limite $c \rightarrow \infty$. Dosadením za α ukážte, že r_{ATOM} a E_{ATOM} nie sú v skutočnosti závislé na c a teda sa nezmenia, ak budeme uvažovať nerelativistickú limitu $c \rightarrow \infty$.

(b) Klasickú mechaniku dostávame z kvantovej teórie v limite $\hbar \rightarrow 0$. Vidno to napríklad zo vzťahu neurčitosti $\Delta x \Delta p_x \simeq \hbar$. Možno povedať, že touto limitou vypíname kvantovú povahu sveta.

Čomu vychádza rovný rádový odhad pre E_{ATOM} a r_{ATOM} v tejto klasickej limite?

Okomentujte, či sú tieto výsledky v zhode s tým, čo očakávame od klasickej fyziky. **[2 body]**

6. 2-štrbinový experiment

Uvažujme optickú interferenciu na tienidle vďaka dvom štrbinám a bod na tienidle, v ktorom je dráhový rozdiel svetla z jednej a druhej štrbiny rovný Δa . Určte intenzitu svetla na tienidle v porovnaní s intenzitou dopadajúceho svetla, ak je

- (i) $\Delta a = 2\lambda$,
- (ii) $\Delta a = \frac{3}{2}\lambda$,
- (iii) $\Delta a = \frac{1}{4}\lambda$.

Ak je odpoveďou maximálna či minimálna možná intenzita, koľkým maximom / minimom je v poradí od hlavného maxima? **[2 body]**

7. obtiažnosť pozorovať kvantové javy v 2-štrbinovom experimente

Odvolávame sa na obrázok vyššie. Vychádzajúc z Pytagorovej vety odvodte, že dráhový rozdiel $\Delta a = a_2 - a_1$ je pre $D \gg d$ a tiež $D \gg y$ rovný $d \frac{y}{D}$ plus členy vyššieho rádu v d/D a y/D , ktoré zanedbávame.

Nech $d = 0.5 \text{ mm}$ a $D = 20 \text{ m}$. Uvažujme optickú interferenciu na dvojštrbine, teda pre vlnenie, ktorým je viditeľné svetlo. Nájdite veľkosť (t.j. šírku) hlavného maxima na tienidle pre červené svetlo s vlnovou dĺžkou 632.8 nm (neón-héliový laser).

Uvažujme elektróny prechádzajúce dvojštrbinou s tými istými d a D . Nájdite šírku hlavného maxima, ak sú pri zdroji elektróny urýchlené potenciálovým napätím 1 mV. Prediskutujte svoj výsledok. Pomôže uvidieť interferenčný obrazec, ak zameníme ľahké elektróny za ťažké atómy či molekuly?

Pozn: Experimentátori dokázali zostaviť dvojštrbinový experiment citlivý na interferenciu makromolekúl obsahujúcich 10 000 nukleónov:

<https://arxiv.org/abs/1310.8343> (článok z r.2013), resp. 25 000 nukleónov:

<https://www.nature.com/articles/s41567-019-0663-9>

(follow-up článok z r.2019).

[2 body]

8. bonus príklad - princíp neurčitosti a gravitačne viazané stavy

Aký je typický rozmer gravitačne viazanej sústavy dvoch neutrónov, ak zoberieme do úvahy princíp neurčitosti? Ignorujme silnú aj zvyškovú elektromagnetickú silu (od kvarkov v neutróne).

Budú sa neutróny dotýkať, keďže sa gravitačne priťahujú?

[2 body]