

Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.2

riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku prednášky 13.10.2026

1. Na základe prednášky o elektrónoch prechádzajúcich dvojštrbinou voľne napíšte, čo by ste Vy odpovedali na otázku, čo je to elektrón. **[2 body]**

2. viazané a rozptylové stavy

Sústava pozostávajúca z viacerých častíc je viazaná vtedy, ak treba dodať energiu (vykonať prácu) na oddialenie jednotlivých častíc do nekonečna. Minimálna energia k tomu potrebná je potom väzbovou energiou sústavy.

Sústava - typicky uvažujeme dve častice - je rozptylová, ak na vzdialenie častíc do nekonečna netreba konať prácu. V nekonečne potom môžu mať tieto častice kinetickú energiu, alebo v krajnom prípade tam asymptoticky pomaly doputujú a zastanú.

Určte, ktoré z nasledujúcich sústav sú viazané a ktoré rozptylové, pridajte prípadne stručnú poznámku na vysvetlenie odpovede:

- (i) elektrón a protón v atóme vodíka,
- (ii) elektrón a antiprotón,
- (iii) jadro ťažkého vodíka,
- (iv) dva protóny pri pružnej zrážke na urýchľovači LHC,
- (v) dvojhviezda,
- (vi) Halleyho kométa v Slnecnej sústave,
- (vii) Oumuamua v Slnecnej sústave.

[2 body]

3. základné pojmy mikrosвета

(a) Vysvetlite, čo je excitácia a čo ionizácia, a aký je medzi nimi rozdiel.

(b) Koľkokrát môže byť excitovaný neutrálny atóm hélia?

Koľkokrát môže byť tento atóm ionizovaný?

(c) Čo to znamená, keď je nejaký kvantový stav degenerovaný?

(d) Koľkonásobne je degenerovaný prvý excitovaný stav častice na úsečke?

Ako sa táto odpoveď zmení, ak je častica viazaná v trojrozmernej kocke?

[2 body]

4. emisné spektrálne čiary vodíka

(a) Výpočtom dokážte, že všetky vodíkové spektrálne čiary Lymanovej a Paschenovej série sú ľudským okom neviditeľné.

(b) Naozaj odpovedá najnižší prechod Balmerovej série červenému svetlu? Dokážte.

(c) Naozaj nie je žltá farba medzi spektrálnymi čiarami atomárneho vodíka? Dokážte.

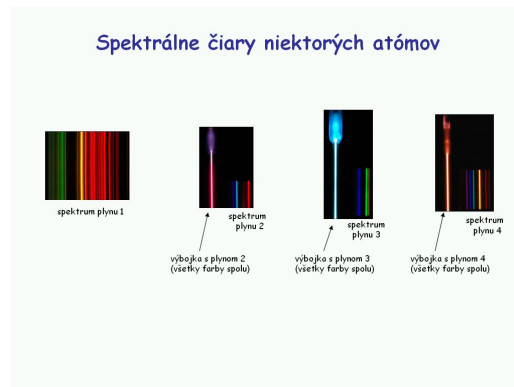
(d) Ktoré zo spektier na obrázku na nasledujúcej strane patrí vodíku?

(e) Ak máme väčšinu viditeľných vodíkových čiar Balmerovej série fialovej farby, prečo vidíme oblaky medzihviezdneho atomárneho vodíka ako červené a nie fialové?

Pomôcka/y: Akým (Boltzmannovým) faktorom je daná relatívna obsadenosť elektrónových hladín veľkého množstva atómov vodíka pri súčasnej teplote $T_0 = 2.7\text{ K}$ vesmíru? Čomu je rovné $k_B T_0$ v našom dnešnom vesmíre v elektrónvoltoch?

[2 body]

5. vlnová funkcia elektrónu v základnom stave v atóme vodíka



(a) Táto vlnová funkcia bola zadaná na prednáške. Vypočítajte normováciu konštantu, ktorá vystupuje v tejto vlnovej funkcii. Jej komplexnú fázu možno položiť rovnú nule, takže vlnová funkcia je reálna kladná v celom priestore.

(b) Predpokladajme, že v uvažovanom stave vieme merať vzdialenosť elektrónu od jadra r . Vypočítajte strednú hodnotu r po meraní r na veľkom počte takýchto sústav.

(c) Okomentujte, prečo sme v časti (b) nedostali najpravdepodobnejšiu polohu elektrónu.

(d) Na základe symetrie určte bez počítania strednú hodnotu meraní polohy elektrónu v uvažovanom stave. Odpoveď vysvetlite. **[2 body]**

6. ortogonalita vlnových funkcií stacionárnych stavov častice na úsečke

Dokážte, že pre $m \neq n$ platí $\int_0^L \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = 0$.

Vychádzajúc z tohto tvrdenia dokážte, že koeficient c_n v rozklade všeobecnej vlnovej funkcie $\Psi(x) = \sum_n c_n \Psi_n(x)$ možno vypočítať zo vzťahu $c_n = \int_0^L \Psi_n^*(x) \Psi(x) dx$. **[2 body]**

7. častica na úsečke: stredná kvadratická odchýlka pri meraní polohy

Uvažujme stacionárne stavy častice na úsečke v čase $t = 0$. V minulosti ste ukázali, že vlnové funkcie týchto stavov sú všetky normované rovnakou konštantou, a že stredná hodnota merania polohy častice je v každom z týchto stavov takisto po každej rovnaká. Toto už neplatí pre strednú kvadratickú odchýlku (disperziu) Δx : na prednáške sme sa tým zaoberali graficky.

(a) V ktorom stacionárnom stave bude uvažovaná stredná kvadratická odchýlka najmenšia a v ktorom najväčšia?

(b) Vypočítajte strednú hodnotu $\overline{x^2}$ a potom Δx pri meraní polohy častice v n -tom stacionárnom stave.

Dostávate zhodu s odpoveďou v časti (a)?

(c) Ako skúšku správnosti vypočítajte Δx pre rovnomerné rozdelenie na intervale $< 0, L >$ a porovnajte s Vaším výsledkom v časti (b) pre $n \gg 1$. **[2 body]**

8. bonus príklad - spektrálne čiary

Akým prvkom patria emisné spektrálne čiary na obrázku k príkladu 4.? Udajte zdroje pre svoje odpovede. **[2 body]**