Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.4

Riešenia, prosím, odovzdajte do začiatku cvičenia 6.11.2026.

1. *nadväzuje na príklad **8.** z dú3 o šírení voľnej častice popísanej gaussovským balíkom*
Na prednáške sme odvodili, že pre gaussovsky rozdelenú hybnosť dostávame gaussovský balík v priestore. Jeho stredná hodnota je $v_g t$, kde $v_g = \frac{d\omega(k_0)}{dk}$ a $\omega = \hbar k^2/(2m)$.
Jeho šírka (stredná kvadratická odchýlka) v priestore je odmocnina z výrazu $\Delta x(0)^2 + \tilde{v}^2 t^2$, kde $\Delta x(0) = \frac{1}{2\Delta k}$ je šírka priestorového balíka v počiatočnom čase $t = 0$, a $\tilde{v} = (\hbar \Delta k)/m$ je rýchlosť s akou šírka balíka narastá. Pre malé časy je šírka zjavne takmer konštanta $\Delta x(0)$. Jej zväčšovanie sa prejaví až v čase t_R, keď sú oba členy rádovo rovnako veľké.

(a) Určte t_R pre elektrón s $\Delta pc \approx 1\,\mathrm{meV}$ (milielektrónvolt). Predpokladajme, že elektrón je v čase $t = 0$ emitovaný do voľného priestoru bez polí (napr. bez elektrického poľa) a jeho stav je popísaný vlnovou funkciou v tvare gaussa, viď vyššie.

(b) K odhadu jeho rýchlosti predpokladajme, že pri emisii dostane elektrón kinetickú energiu 1 eV. Akú vzdialenosť preletí predtým, než sa začne rozplývať podľa zákonov kvantovej mechaniky? *Mne vyšlo 600 m. Použil som* $\hbar = 4 \cdot 10^{-15}\,eV\,s$. **[2 body]**

2. *výpočet strednej hodnoty zo vzťahu* $\overline{A} = \int \Psi^* \hat{A} \Psi$

Uvažujte časticu na úsečke v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \sqrt{\frac{30}{L^5}} x(L-x)$. V minulosti sme našli pravdepodobnosti $P(E_n)$ namerať v tomto stave energiu E_n, netreba ich tu počítať. Sú aj v Zbierke, str.46 tlačená verzia a 34 v pdf. Ukážte, že predpoveď pre strednú hodnotu merania energie v tomto stave $\overline{E} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\, P(E_n)$ dostaneme rovnako (a oveľa pohodlnejšie), ak ju počítame zo vzťahu $\overline{E} = \int_0^L \Psi(x)^*\, \hat{H} \Psi(x)\, dx$. Teda vypočítajte $\overline{E}$ oboma spôsobmi a okomentujte zhodu.
Nekonečný rad možno spočítať pomocou známej zeta funkcie $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Pripomeňme, že v uvedenom stave je $P(E_1) = 0.999$. Porovnajte preto vypočítanú $\overline{E}$ s E_1 a okomentujte. **[2 body]**

3. *základný stav elektrónu v atóme vodíka*
Vlnová funkcia elektrónu v základnom stave atómu vodíka bola uvedená už v minulosti: $\Psi_{100}(\vec{r}) = Ae^{-r/a_B}$, kde $A = 1/\sqrt{\pi a_B^3}$ je normovacia konštanta, ktorá v tejto otázke nie je dôležitá, a indexy 100 sú kvantové čísla n, ℓ, m, ktoré budú zavedené neskôr a tu takisto nie sú dôležité. $a_B = \hbar/(mc\alpha)$ je Bohrov polomer.

(a) Dokážte priamym výpočtom, že $\Psi_{100}(\vec{r})$ (ktorá zatiaľ iba spadla z neba) skutočne opisuje stacionárny stav a vyhovuje bezčasovej SchR pre $E = E_1 = -13.6\,\mathrm{eV}$. Alebo inak: dokážte, že $\Psi_{100}(\vec{r})$ je vlastnou funkciou hamiltoniánu (s Coulombovským potenciálom od protónu) s odpovedajúcou vlastnou hodnotou E_1.
Návod: laplasián vystupujúci v $\hat{H}$ vyjadrite vo sférických premenných. Derivácie podľa uhlov nám netreba, keďže $\Psi_{100}(\vec{r})$ od uhlov nezávisí. Stále zostáva zdĺhavý výpočet.Našťastie vieme, čo má výjsť.

(b) V časti *(a)* môže pomôcť séria vzťahov pre energiu základného stavu E_1. Táto je $-\frac{1}{2} m_e c^2 \alpha^2 = -\frac{\alpha \hbar c}{2a_B} = -\frac{m\,(e^2/(4\pi\varepsilon_0))^2}{2\hbar^2}$.
Dokážte, že naozaj platia uvedené rovnosti. **[2 body]**

4. *základný stav elektrónu v atóme vodíka - princíp neurčitosti*
Príklad nadväzuje na príklad **5.** v dú2, osobitne je tam užitočná časť *(d)*.

(a) Výpočítajte strednú kvadratickú odchýlku Δx merania polohy elektrónu (priemetu na os x). *Pomôcka k výpočtu $\overline{x^2}$: vzhľadom na symetriu úlohy stačí vo sférických súradniciach vypočítať $\overline{r^2}$ a potom deliť tromi, nakoľko $\overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}$ a $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2}$.*

(b) Výpočítajte strednú kvadratickú odchýlku Δp_x merania hybnosti elektrónu (priemetu na os x). *Pomôcka k výpočtu $\overline{p_x^2}$: s využitím symetrie úlohy stačí vo sférických súradniciach vypočítať $\overline{p^2}$ a deliť tromi, nakoľko $\overline{p^2} = \overline{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ a $\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = \overline{p_z^2}$.*

(c) Pomocou vypočítaných Δx a Δp_x overte, že (či) platí princíp neurčitosti. **[2 body]**

5. *definícia hermitovosti*
Na prednáške sme zadefinovali hermitovosť operátora $\hat{A}$ pomocou rovnosti $\int \Phi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A}\Phi)^* \Psi$, platnej pre ľubovolné dve kvadraticky integrovateľné funkcie Φ, Ψ.
Mohlo by sa zdať, že táto definícia je viac všeobecná, ako keby sme definovali hermitovosť $\hat{A}$ pomocou rovnosti $\int \Psi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A}\Psi)^* \Psi$, v ktorej vystupuje len jedna funkcia Ψ. Toto však nie je pravda. Naša definícia je **ekvivalentná** definícii $\int \Psi^* \hat{A} \Psi = \int (\hat{A}\Psi)^* \Psi$ s jedinou funkciou (kvadraticky integrovateľnou $\Psi(x)$). Dokážte toto tvrdenie.
Treba dokázať, že jedna definícia implikuje druhú a naopak. Pozrite k tomu Zelenú knihu na str.99 - tlačená verzia, resp. 67 v pdf. **[2 body]**

6. *hermitovský operátor*
Určte, či sú hermitovské nasledujúce operátory:
(a) operátory tretej a štvrtej derivácie (*pozn: na prednáške bolo, že ∂_x nie je hermitovský a ∂_x^2 už je*),
(b) operátor $\hat{p}_x^2$ (*pozn: na prednáške bolo, že $\hat{p}_x$ je hermitovský*),
(c) hamiltonián pre voľnú časticu v troch rozmeroch,
(d) operátor momentu hybnosti $\hat{L}_z$ (jeho z-ová zložka) $\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$,
(e) operátor $\hat{Q}$, ktorý pôsobí tak, že $\hat{Q}\Psi(x) = |\Psi(x)|^2$,
(f) operátor posunutia $\hat{T}_a$ o konštantu a, ktorý pôsobí tak, že $\hat{T}_a \Psi(x) = \Psi(x - a)$. **[2 body]**

7. *komutátory*
(a) Zjednodušte komutátor $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$ na výraz, v ktorom budú už len jednoduché komutátory. (Návod: použite identitu ABC-BCA=ABC-BAC+BAC-BCA).

(b) Použite výsledok z časti *(a)* na výpočet komutátorov $[\hat{x}^2, \hat{p}]$ a $[\hat{x}, \hat{p}^2]$ pomocou známeho výsledku pre komutátor $[\hat{x}, \hat{p}]$. **[2 body]**

8. $\hat{L}_z$ *vo sférických súradniciach*
Dokážte, že vo sférických súradniciach platí $\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.
Návod: keďže vieme vyjadrenie pre $\hat{L}_z$ v kartézskych súradniciach, teda vieme, čo má výjsť na ľavej strane, môžeme začať pravou stranou pôsobiacou na funkciu $\Psi(x, y, z)$, kde kartézske súradnice x, y, z chápeme ako závislé zložené funkcie troch nezávislých sférických premenných. **[2 body]**

9. *komutátory* $[\hat{L}_i, \hat{L}_j]$
Vypočítajte komutátor $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ a výsledok vyjadrite pomocou $\hat{L}_z$. Analogicky, teraz už bez počítania využitím cyklickej zámeny určte, čomu sú rovné $[\hat{L}_y, \hat{L}_z]$ a $[\hat{L}_z, \hat{L}_x]$. **[2 body]**

10. *komutátory* $[\hat{L}_i, \hat{L}^2]$
V príklade **7.** ste ukázali zjednodušenie komutátora $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$. Využite tento trik na výpočet $[\hat{L}_x, \hat{L}^2]$,

kde $\hat{L}^2$ je súčet kvadrátov zložiek $\hat{\vec{L}}$.

S využitím cyklickej zámeny určte bez počítania, čomu sú rovné $[\hat{L}_y, \hat{L}^2]$ a $[\hat{L}_z, \hat{L}^2]$. **[2 body]**

11. *bonus príklad - hermitovské operátory*
Nech $\hat{A}$ a $\hat{B}$ sú hermitovské operátory, ktoré vo všeobecnosti nekomutujú, t.j. záleží na ich poradí. Rozhodnite, či sú hermitovské aj nasledujúce operátory:
(a) operátor $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ (súčet operátorov),
(b) operátor $\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B}$ (súčin operátorov),
(c) operátor $\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B} + \hat{B}\,\hat{A}$ (antikomutátor herm. operátorov),
(d) operátor $\hat{C} = \hat{A}\,\hat{B} - \hat{B}\,\hat{A}$ (komutátor herm. operátorov),
(e) operátor $\hat{C} = \hat{A}^2$ (druhá mocnina hermitovského operátora),
(f) operátor $\hat{C} = \hat{A}^n$ (n-tá mocnina hermitovského operátora). **[2 body]**