Príklady na domácu úlohu z kvantovej teórie

Sada č.5

Riešenia, prosím, odovzdajte do poludnia 16.11.2026.

1. *parita gaussovského balíka*
*Parita ako fyzikálna veličina je cudzia našej intuícii, lebo ju definujeme pomocou operátora parity pôsobiaceho na vlnovú funkciu. V makrosvete nemáme vlnové funkcie na popis stavu sústavy, ani meracie prístroje, ktoré by ju merali napr. guličke gúľajúcej sa po stole. V kvantovom svete je však parita veľmi užitočná. Jej základné vlastnosti boli zhrnuté v príklade **3.** cvika06.*
Tu uvažujme voľnú časticu opisovanú gaussovským vlnovým balíkom v čase $t = 0$ v jednom rozmere. V k-priestore je balík zadaný vzťahom $c_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta k}\right)^{1/2} e^{-(k-k_0)^2/4(\Delta k)^2}$, takže $|c_k|^2$ je gaussovské rozdelenie hybnosti so strednou hodnotou k_0 a strednou kvadratickou odchýlkou Δk. Superpozícia rovinných vĺn $\Psi_k(x)$ s uvedenou váhou c_k vedie na vlnový balík odvodený na prednáške $\Psi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta x}\right)^{1/2} e^{ik_0x}\, e^{-x^2/4(\Delta x)^2}$, kde $\Delta x = \frac{1}{2\Delta k}$.

V tomto príklade tomuto gaussovskom balíku meriame paritu P, vždy pre $t = 0$.

(a) Najprv uvažujme prípad stojaceho balíka s $k_0 = 0$. Aká je predpoveď pre strednú hodnotu $\overline{P}$ z formalizmu kvantovej mechaniky $\overline{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)^*\, \hat{P}\, \Psi(x)\, dx$?
Dáva odpoveď zmysel? Čomu je rovná stredná kvadratická odchýlka ΔP ?

(b) Uvažujme teraz bežiaci balík (stále iba v čase $t = 0$), teda pre $k_0 > 0$. Vypočítajte $\overline{P}$. Budeme naďalej pokaždé merať paritu balíka rovnú tej istej vlastnej hodnote?

(c) Ukážte, že pre $k_0 > 0$ je $\Delta P = \sqrt{1 - e^{-k_0^2/(\Delta k)^2}}$.
Dávajú zmysel limitné prípady veľmi širokého a veľmi úzkeho balíka? **[3 body]**

2. *komutujúce operátory*
(a) Napíšte znenie vety o vlastných funkciách komutujúcich operátorov.

(b) Je to náhoda, že vlnové funkcie stacionárnych stavov častice na úsečke boli vždy buď párne alebo nepárne voči stredu úsečky? Alebo to jednoznačne vyplýva z vlastností hamiltoniánu a operátora parity na úsečke? *Svoju odpoveď vysvetlite. Návod: príklad **6.** cvika06.* **[2 body]**

3. *komutujúce operátory*
Uvažujte elektrón v atóme vodíka. Napíšte $\hat{H}$ a $\hat{L}_z$ vo sférických súradniciach. Overte, že komutujú. (*Mimochodom, je to jednoduchšie overiť vo sférických alebo v kartézskych súradniciach?*)
Čo vyplýva pre ich vlastné funkcie z rovnosti $\hat{H}\hat{L}_z = \hat{L}_z\hat{H}$, teda zo vzťahu $[\hat{H},\, \hat{L}_z] = 0$?
Čo z toho vyplýva pre neurčitosť ΔL_z pri meraní L_z elektrónu v základnom stave?
Zmení meranie L_z vlnovú funkciu, a teda stav elektrónu (ktorý je pred meraním L_z v základnom stave)?
Overte na vlnovej funkcii základného stavu, že je zároveň vlastnou funkciou $\hat{L}_z$. Akú hodnotu orbitálneho momentu hybnosti L_z meriame elektrónu v tomto stave?

Poznámka: Zovšeobecnenie aj na excitované stavy si vyžaduje opatrnosť. Pre excitované stavy máme degeneráciu hladín. Na základe prednášky treba pre degenerovanú energetickú hladinu E_n vyberať správne lineárne kombinácie odpovedajúcich vlastných funkcií $\hat{H}$, aby boli aj vlastnými funkciami $\hat{L}_z$ a aby tak mali $\hat{H}$ a $\hat{L}_z$ spoločné vlastné funkcie. Pre základný stav to netreba robiť, lebo základná hladina pre elektrón v atóme vodíka nie je degenerovaná - ignorujúc spin elektrónu. **[2 body]**

4. *Schwarzova nerovnosť a nekomutujúce operátory*
(a) Aký vzťah neurčitosti platí v ľubovolnom stave Ψ pre nekomutujúce hermitovské operátory?

(b) Na prednáške sme pri dôkaze tohto vzťahu vyšli zo Schwarzovej nerovnosti: pre ľubovolné dve komplexné kvadraticky integrovateľné funkcie $f(x)$ a $g(x)$, $x \in \mathcal{R}$, platí nerovnosť $\left(\int |f(x)|^2\right) \cdot \left(\int |g(x)|^2\right) \geq \left|\int f(x)^* \, g(x)\right|^2$.

Dokážte túto pomocnú vetu.

Pomôcka: vyjdite z nerovnosti $\int |f + \lambda g|^2 \geq 0$, ktorá zjavne platí pre každé $\lambda \in \mathcal{C}$. Osobitne najprv dokážte, že tvrdenie platí pre $g(x) = 0$, teda pre nulovú funkciu na celej reálnej osi. V druhom kroku uvažujte takú $g(x)$, ktorá už nie je všade rovná nule a teda možno deliť s integrálom $\int |g|^2 dx$. Teraz šikovne zvoľte $\lambda = -\left(\int g^* f\right) / \left(\int |g|^2\right)$. **[2 body]**

5. *nekomutujúce operátory*
Vysvetlite, či môže existovať kvantový stav elektrónu, ktorý je popísaný takou vlnovou funkciou, že táto sa nebude meniť pri striedavo sa opakujúcich meraniach polohy a hybnosti elektrónu.

*Tejto otázke sa detailnejšie venuje príklad **7.** cvika06.* **[2 body]**

6. *rôzne vzťahy neurčitosti pre rôzne kvantové stavy systému*
(a) Uvažujme merania veličín A a B, ktorým odpovedajú nekomutujúce operátory. Je možné, aby pre rôzne kvantové stavy Ψ toho istého systému platili rôzne vzťahy neurčitosti pre súčin $\Delta A \, \Delta B$? Odpoveď zdôvodnite.

Ak Vám príde táto otázka moc komplikovaná, preskočte ju a k odpovedi sa vráťte po zodpovedaní otázok nižšie.

Mimochodom, ako vždy $\Delta A \, \Delta B$ zisťujeme z veľkého počtu meraní tak, že na jednom konkrétnom systéme v stave Ψ odmeriame A (alebo B) vždy iba raz. Predpokladá sa, že máme identickým spôsobom pripravené veľké množstvo takýchto systémov, všetky v stave Ψ.

(b) Nech A je poloha častice a B jej parita. Vypočítajte komutátor $[\hat{x}, \hat{P}]$.

(c) Na základe výsledku časti *(b)* v kombinácii s **4.***(a)* aký vzťah neurčitosti platí pre súčin Δx a ΔP v nejakom (ľubovolnom) stave Ψ?

(d) Teraz konkretizujme stav Ψ. Uvažujme gaussovský vlnový balík z príkladu **1.** popisujúci voľnú časticu v čase $t = 0$. Na základe **6.***(c)* vypočítajte, aký vzťah neurčitosti bude platiť pre súčin Δx a ΔP v stave odpovedajúcom stojacemu balíku, keď $k_0 = 0$?
*ΔP (aj Δx) už poznáme z príkladu **1.** Dostávame triviálny vzťah neurčitosti, ktorý nie je zaujímavý, keďže je samozrejmý.*

(e) To isté, ako v časti *(d)*, ale pre $k_0 > 0$.
*ΔP (aj Δx) opäť poznáme z príkladu **1.** Dostávame netriviálny vzťah neurčitosti, dokonca na prvý pohľad ani nie je jasné, či nerovnosť skutočne platí.* **[3 body]**

7. *bonus príklad - overenie platnosti vzťahu neurčitosti pre polohu a paritu v stave gaussovského balíka*
Dokážte, že naozaj platí nerovnosť

$$\frac{1}{2\Delta k} \sqrt{1 - e^{-k_0^2/(\Delta k)^2}} \geq \frac{k_0}{2(\Delta k)^2} \, e^{-k_0^2/2(\Delta k)^2}$$

obdržaná vo výsledku príkladu **6.***(e)*. **[2 body]**