

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. základné pojmy

Čo je základný stav kvantového systému?

Čo sú excitované stavy (prvý, druhý, n -tý)?

Čo je ionizovaný stav?

Čo je viazaný stav?

Čo je stacionárny stav?

Ak sa to dá, každý z týchto pojmov prediskutujte pre atóm vodíka (čiže pre elektrón v atóme vodíka) a tiež pre časticu na úsečke.

2. základné pojmy - pokračovanie

Môže mať elektrón energiu $E > 0$ v Coulombovskom poli od bodového nekonečne ťažkého protónu?

Je takáto sústava stále atómom vodíka (čiže viazaným stavom elektrónu)?

Môže izolovaná sústava dvoch elektrónov vytvoriť viazaný stav?

Môže izolovaná sústava dvoch protónov vytvoriť viazaný stav?

Môže izolovaná sústava, ktorá pozostáva z dvoch protónov a dvoch neutrónov vytvoriť viazaný stav?

Čo by ste povedali na otázku, prečo nie je v prírode atómové jadro s piatimi nukleónmi?

Môže nejaká sústava dvoch nukleónov tvoriť viazaný stav?

(Nukleón je skrátené označenie pre protón alebo neutrón, teda častice jadra.)

3. častica na úsečke

Označenia: v nulovom čase budeme odteraz označovať $\Psi_n(x, t = 0)$ ako $\Psi_n(x)$.

(a) Napíšte tvar vlnovej funkcie stacionárneho stavu v čase $t = 0$ pre ľubovoľné prirodzené n .

(b) V čase $t = 0$ načrtnite vlnovú funkciu základného stavu na úsečke $x \in [0, L]$ na obrázku s pomenovanými osami.

(c) Napíšte tvar funkcie popisujúcej hustotu pravdepodobnosti výskytu častice z časti (b) a načrtnite jej priebeh na obrázku s pomenovanými osami.

(d) Na základe náčrtku z časti (c) určte najpravdepodobnejšiu polohu častice na úsečke v základnom stave.

(e) Podobne určte najmenej pravdepodobnú polohu častice v základnom stave.

(f) Kde je väčšia pravdepodobnosť nájsť časticu v základnom stave: v prvej alebo v druhej polovici úsečky?

(g) V prípade veľa meraní polohy častíc v základnom stave, čo môžeme predpovedať o strednej hodnote týchto meraní, na základe symetrie (párnosti) $|\Psi_1(x)|^2$ voči stredu úsečky?

4. častica na úsečke

(a) Napíšte a načrtnite $\Psi_2(x)$. Ktorému excitovanému stavu častice odpovedá? Akú má vtedy častica energiu?

(b) Čo je najpravdepodobnejšou polohou častice v tomto stave? Čo je najmenej pravdepodobnou polohou? Je k tomu užitočnejší náčrtok ako náčrtok z časti (a)?

(c) Aká je predpoveď pre strednú hodnotu merania polohy častice v tomto stave?

5. častica na úsečke

(a) Na prednáške sme zdôraznili princíp superpozície. Čo hovorí tento princíp?

(b) Na základe princípu superpozície sme povedali, že z existencie stavov popísaných vlnovými funkciami $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$ musí existovať aj stav popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2(x)$. Načrtnite graf $\Psi(x)$ a k tomu odpovedajúcu hustotu pravdepodobnosti výskytu častice na úsečke.

(c) Kde je väčšia pravdepodobnosť nájsť časticu v stave Ψ : v prvej alebo v druhej polovici úsečky?

(d) Aká superpozícia stavov Ψ_1 a Ψ_2 dá stav, v ktorom bude častica s väčšou pravdepodobnosťou nájdená v druhej polovici úsečky?

(e) Čo môžeme predpovedať pre výsledok merania energie častice v stave Ψ ?

6. *stacionárne stavy častice na úsečke: normovanie a stredné hodnoty*

(a) Napište (po pamäti alebo z prednášky) vlnovú funkciu popisujúcu stacionárny stav častice na intervale $< 0, L >$ pre ľubovoľné n .

Načrtnite jej graf na tomto intervale, a do druhého obrázku načrtnite priebeh hustoty pravdepodobnosti $|\Psi_n(x, t)|^2$.

(b) Vypočítajte normovacu konštantu A_n z podmienky, že pravdepodobnosť nájsť časticu na celej úsečke je vždy rovná 1.

Pomôcka: integrál nepočítajte pracne cez per partes, ale využite, že plocha pod funkciou $\sin^2 \frac{n\pi x}{L}$ je na intervale $< 0, L >$ rovnako veľká ako plocha pod funkciou $\cos^2 \frac{n\pi x}{L}$. *Tieto funkcie nie sú rovnaké, ale plochy pod nimi na celej úsečke sú rovnaké. Funkcie sú voči sebe iba posunuté, a to tak, že pol hrbu, ktorý chýba na začiatku funkcii $\cos^2 \frac{n\pi x}{L}$, má táto funkcia pridané na konci úsečky - v porovnaní s funkciou $\sin^2 \frac{n\pi x}{L}$.* Plus použite, že pre ľubovoľný argument α platí $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Aká vyšla závislosť normovacej konštanty A_n na kvantovom čísle n ?

(c) Keď už poznáme normovacu konštantu A_n , môžeme teraz vypočítať strednú hodnotu polohy častice. Opäť nepodľahnite tlaku počítať zdĺhavo integrál $\bar{x} = \int_0^L x |\Psi_n(x)|^2 dx$ metódou per partes. Možno ho vypočítať bezpracne vďaka triku $\bar{x} = \int_0^L [(x - L/2) + L/2] |\Psi_n(x)|^2 dx$, kde guľatá zátvorka dáva nulu z dôvodu nepárnosti voči stredu úsečky a zostávajúci integrál je až na konštantu $L/2$ rovnaký ako integrál z časti (b).

7. *superpozícia stacionárnych stavov častice na úsečke*

(a) Uvažujme časticu na úsečke, ktorá je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = c_1\Psi_1(x) + c_2\Psi_2(x)$, kde c_1 a c_2 sú komplexné konštanty. Akú podmienku musia spĺňať c_1 a c_2 , aby bola vlnová funkcia $\Psi(x)$ správne normovaná?

(b) Načrtnite hustotu pravdepodobnosti výskytu častice na úsečke, ktorá je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x) + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_2(x)$.

8. *vzťah ortogonalít pre vlnové funkcie stacionárnych stavov*

Dokážte, že pre $m \neq n$ platí $\int_0^L \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = 0$.