

Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

0. táto otázka je o povahe kvantového stavu

Napíšte a načrtnite $\Psi_2(x)$ pre časticu na úsečke, mali by ste to dať bez veľkého rozmýšľania. Načrtnite aj hustotu pravdepodobnosti výskytu častice v tomto stave. Čo je najmenej pravdepodobnou polohou častice vo vnútri úsečky? Častica je v *stacionárnom* stave, najmenej pravdepodobná poloha takou zostáva pre všetky $t > 0$.

Kľúčová otázka: keďže v najmenej pravdepodobnej polohe je nulová pravdepodobnosť nájsť časticu v každom čase (*takmer nulová v intervale dx okolo tejto hodnoty*), ako potom častica prechádza touto polohou pri svojom pohybe po úsečke?

1. častica na úsečke: superpozícia stacionárnych stavov

Označenia: v čase $t = 0$ označujeme vlnovú funkciu stacionárneho stavu $\Psi_n(x, t = 0)$ ako $\Psi_n(x)$.

Uvažujme časticu na úsečke v stave Ψ popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{-\sqrt{2}+i}{3} \Psi_1(x) + \frac{2+i\sqrt{2}}{3} \Psi_4(x)$.

(a) Dokážte, že táto vlnová funkcia je správne normovaná, teda že platí, že $|\Psi(x)|^2$ má na úsečke naozaj význam hustoty pravdepodobnosti, ktorá dá so 100-percentnou istotou výskyt na celej úsečke. Všimnite si, že netreba počítat integrál zo $|\Psi(x)|^2$. Stačí overiť, či v superpozícii $\sum_n c_n \Psi_n(x)$ platí $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Uistite sa, že sčítujete $|c_n|^2$ a nie c_n^2 .

(b) Uvažujme meranie energie na častici v stave Ψ .

Akú predpoveď dáva kvantová teória pre výsledok merania energie na jednej takejto častici?

Akú predpoveď dáva kvantová teória pre strednú hodnotu merania energie na veľkom počte identicky pripravených častíc, každá v stave Ψ .

Akú predpoveď dáva kvantová teória pre strednú kvadratickú odchýlku (teda rozptyl, cudzím slovom disperziu) merania energie na uvažovanom veľkom počte identicky pripravených častíc.

(c) Akú predpoveď dáva kvantová teória pre druhé meranie energie nasledujúce po predchádzajúcom (prvom) meraní energie častice v stave Ψ .

2. častica na úsečke: superpozícia stacionárnych stavov

Uvažujme časticu v stave Ψ popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{10}} \Psi_1(x) + c \Psi_2(x)$.

(a) Určte všetky možné hodnoty komplexnej konštanty c , pre ktoré je $\Psi(x)$ správne normovaná.

(b) Navrhните c tak, že $\Psi(x)$ bude správne normovaná a častica sa bude pri meraní polohy s väčšou pravdepodobnosťou nachádzať v druhej polovici úsečky.

(c) Navrhните c tak, že $\Psi(x)$ bude správne normovaná a stredná hodnota merania polohy častice bude v strede úsečky.

3. častica na úsečke - časový vývoj

(a) Aký je časový vývoj vlnovej funkcie $\Psi_n(x, t > 0)$, ktorá je v čase $t = 0$ rovná $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$?

Načrtnite graf hustoty pravdepodobnosti výskytu $|\Psi_n(x, t > 0)|^2$ v ľubovoľnom čase $t > 0$.

(b) Napíšte, čomu je rovná vlnová funkcia $\Psi_+(x, t > 0)$, ak v čase $t = 0$ platí $\Psi_+(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_2(x)$.

Poznámka: dôraz je tu na časovom vývoji. Na prednáške sme už načrtli $|\Psi_+(x, t)|^2$ pre rôzne časy a naznačili sme veľkosť periódy, s akou osciluje.

(c) Napíšte výraz (integrál) pre strednú hodnotu polohy $\bar{x}(t)$ častice v stave Ψ_+ v ľubovoľnom čase $t \geq 0$. V integráli nedosadzujte za $\Psi_1(x)$ a $\Psi_2(x)$, len ho upravte tak, že z Vášho výrazu

bude vidno, že $\bar{x}(t)$ koná harmonické kmity. Určte ich ω , resp. periódu. Amplitúda kmitov je z per partes integrovania, (tam už treba dosadiť za Ψ_1 a Ψ_2). Vypočítajte ju iba v prípade dostatku času; vychádza približne rovná $L/6$, kmity sú samozrejme okolo stredu úsečky $L/2$.

Podstatné sú tu tie **harmonické kmity**, lebo tak sa klasická guľička viazaná na úsečku nespráva. Klasická guľička sa odráža od krajov a medzi nimi ide rovnomernou rýchlosťou, klasická analógia je jednorozmerný pohyb v úzkej krabici dĺžky L rovnobežný s vodorovnou hranou krabice. Na domácu úlohu ukážete, že toto očakávané správanie častice naozaj vyplýva z kvantovej superpozície väčšieho počtu susedných stavov s vysokými kvantovými číslami n , teda s veľkými energiami. Tu uvažovaná superpozícia takou nie je. Harmonické kmity sú tu kvantovým efektom pre superpozíciu dvojice stacionárnych stavov. Nemajú nič spoločné s klasickou limitou pre pohyb našej častice.

4. častica na štvorci

(a) Uvažujme časticu s nulovým spinom viazanú na štvorci o strane L . Aká je energia 2. a 3. excitovaného stavu ako násobok $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$?

(b) Aká je degenerácia uvažovaných dvoch excitovaných stavov?

5. častica v kocke

Rovnaké otázky ako v príklade 4. pre časticu v kocke.

6. dve častice na štvorci

(a) Napíšte energiu základného stavu a energiu prvého excitovaného stavu, plus degenerácie týchto hladín - pre dva identické neinteragujúce bozóny s nulovým spinom.

(b) To isté pre dva fermióny so spinom $\hbar/2$.

7. odhad Fermiho hladiny

Na prednáške sme odvodili $E_F = A\rho^{2/3}$, kde ρ je hustota počtu elektrónov a konštanta A bola rovná $A = (3/\pi)^{2/3} (\pi^2 \hbar^2)/(2m)$. Odhadnite Fermiho energiu pre kovový sodík. (Dôležité sú len vodivostné elektróny.) Jeho mriežku považujme za kubickú s hranou $d = 3.5 \times 10^{-10}$ m. Kladný ión sodíka prispieva do vodivostného pásu jedným elektrónom.