Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. Zbierka, A11., pdf verzia str.16 *častica na úsečke* $\langle 0, L\rangle$
Na prednáške sme vysvetlili, že častica tlačí na kraje úsečky a snaží sa ju rozopnúť. Urobte rádový odhad tejto sily na základe klasického vzťahu pre prácu vykonanú telesom, ktoré sa posunie o δL. *Uvažujte časticu v základnom stave a pomalé rozopnutie úsečky o* $\delta L \ll L$, *ktoré nevedie k excitácii. Práca sa tu zjavne rovná zmene energie častice po roztiahnutí úsečky o* δL.
Po odvodení všeobecného vzťahu dosaďte hodnoty: atomárny rozmer $L = 10^{-10}\,\mathrm{m}$ a hmotnosť častice $m = m_e$, kde $m_e c^2 = 0.5\,\mathrm{MeV}$. Silu potom určte v newtonoch. Pokúste sa o výpočet bez kalkulačky: doplňte $\hbar^2$ na $\hbar^2 c^2$ a m_e na $m_e c^2$. Pre náš odhad stačí za $1\,\mathrm{eV}$ dosadiť $10^{-19}\,\mathrm{J}$ a $\pi^2 \approx 10$.

2. Zbierka, A12., pdf verzia str.17 *úzko nadväzuje na predchádzajúci príklad*
Odhadnite tlak v SI jednotkách, ktorým tlačí uvažovaná častica na kraj úsečky za predpokladu, že roztiahnutiu úsečky bráni "stena" rozmeru L^2, teda niečo ako (veľmi zhruba) susedný atóm. Porovnajte ho s atmosférickým tlakom cca $100\,\mathrm{kPa}$.

3. *častica na úsečke* $\langle 0, L\rangle$
Uvažujme časticu v stave popísanom vlnovou funkciou, ktorá je po častiach lineárna, a to tak, že $\Psi(x) = Ax$ v prvej polovici úsečky a $\Psi(x) = A(L - x)$ v druhej polovici úsečky.

(a) Overte v rýchlosti, že $\Psi(x)$ je spojitá v strede úsečky.

(b) Načrtnite v dvoch osobitných obrázkoch vlnovú funkciu a hustotu pravdepodobnosti výskytu častice. Je hustota pravdepodobnosti symetrická (párna voči stredu)?
Poznámka: Skutočná $\Psi(x)$ *by nemala mať hrot pre* $x = L/2$. *Mala by tam mať deriváciu. To obídeme predstavou, že je v skutočnosti dodatočne vyhladená na intervale* $(L/2-\varepsilon,\, L/2+\varepsilon)$ *nejakým malým oblúčikom. Pre* $0 < \varepsilon \ll L$ *ide v tomto príklade o zanedbateľný detail, my tu môžeme v ďalšom uvažovať iba ten hrot.*

(c) Výpočtom určte normovaciu konštantu A. Využite pritom symetriu zadania, takže nebudete samostatne počítať integrál od $L/2$ do L.

(d) Čomu sa rovná pravdepodobnosť namerať výskyt častice v prvej polovici úsečky?

(e) Bez počítania zoraďte podľa veľkosti pravdepodobnosti, že sa bude častica nachádzať v prvej, druhej a tretej tretine úsečky.

(f) Napíšte, akým integrálom vypočítame c_n, pre ktoré platí, že $|c_n|^2$ je pravdepodobnosť namerať častici energiu E_n. Na základe vzťahu pre c_n a symetrie zadania určte bez počítania, ktoré energie určite nenameriame.

(g) Bez počítania určte, ktorú energiu nameriame s najväčšou pravdepodobnosťou. Tipnite si, či bude táto pravdepodobnosť väčšia ako 0.5. Potom túto pravdepodobnosť vypočítajte a overte svoj tip. Pri integrácii postupujte podobne ako v časti *(c)*.

4. *voľná častica*
Napíšte, čomu sa rovná $\Psi_k(x,\, t)$ aj so správnym normovaním na Diracovu delta funkciu.
Pochvala, ak ste napísali správne normovaciu konštantu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.
Aký stav akej častice opisuje $\Psi_k(x,\, t)$? (*Pomôcka: opisuje "voľnú" časticu, nepôsobia na ňu sily. A stav s ostrou hybnosťou* $\hbar k$. *Bolo to povedané, zatiaľ bez dôkazu. Dokážeme neskôr.*)

Načrtnite reálnu časť $\Psi_k(x)$ (teda v čase $t = 0$) a hustotu pravdepodobnosti výskytu pre častice na reálnej osi.

Čo je najpravdepodobnejšou a čo najmenej pravdepodobnou polohou častice na reálnej osi?

Čo je stacionárny stav?
Je uvažovaný stav stacionárny?
Je stacionárnym stav častice na úsečke z príkladu **3.** ?

5. *voľná častica v stacionárnom stave*
Na prednáške sme odvodili periódu vlnovej funkcie $\Psi_k(x,\,t)$ v priestore, čiže jej vlnovú dĺžku λ. Čomu vyšla rovná? *Odpoveď vyjadrená v premennej k (a nie p) pripomína známy vzťah pre klasickú vlnu. Tam sa k volá vlnové číslo. My ho budeme naďalej vnímať ako "hybnosť bez ħ".*
Samostatne odvoďte pre $\Psi_k(x,\,t)$ jej časovú periódu T. Vo výsledku by mali byť iba k a konštanty. Čomu sa rovná λ/T ? Viete to aj bez počítania?

6. *voľná častica*
Pripomeňte si z prednášky, čomu je rovná vlnová funkcia voľnej častice v stave, ktorý je superpozíciou stavu s hybnosťou $k_0 - \Delta k$ a stavu s hybnosťou $k_0 + \Delta k$, kde $0 < \Delta k \ll k_0$. Uvažujte prípad s časovou závislosťou.
Načrtnite reálnu časť $\Psi(x,\,t)$ pre nejaký fixovaný čas, môže byť aj $t = 0$. Ako sa tento náčrtok líši od imaginárnej časti $\Psi(x,\,t)$?
Ktorá časť z $\mathrm{Re}\{\Psi(x,\,t)\}$ odpovedá nosnej vlne a ktorá modulácii?
Napíšte, ako by ste odvodili rýchlosť nosnej vlny. Potom napíšte, ako by ste odvodili rýchlosť modulácie.
Určte všetky miesta, kde sa v čase $t = 0$ častica určite nenachádza. Podobne určte miesta, kde je v čase $t = 0$ maximálna pravdepodobnosť namerať výskyt častice. Zmenia sa tieto lokality v neskoršom čase? Je stav častice *stacionárnym*?

7. *voľná častica*
Voľná častica je v stave popísanom vlnovou funkciou $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{i4qx/\hbar}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{e^{i8qx/\hbar}}{\sqrt{2\pi}}$, kde $q > 0$ je fixovaný parameter s rozmerom hybnosti . S akou pravdepodobnosťou aké hybnosti nameriame tejto častici?
Aká bude stredná hodnota po mnohých meraniach hybnosti na takýchto identicky pripravených časticiach?
Viete si vopred tipnúť strednú kvadratickú odchýlku z týchto meraní? Určte ju aj výpočtom.
Bude aj v tomto prípade vlnová funkcia podobná vlnovej funkcii z príkladu **6.** ? Odpoveď vysvetlite.

8. *voľná častica*
Navrhnite stav voľnej častice (jej vlnovú funkciu), ktorej sa budú dať merať iba tri rôzne hodnoty hybnosti a to s pravdepodobnosťami v pomere 1:2:3 a strednou hodnotou rovnou q.

9. *voľná častica v stave vlnového balíka*
Vlnový balík je popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c_k\,\Psi_k(x,\,t)\,dk$, kde c_k je komplexná funkcia. Taká, že $|c_k|^2$ je hustota pravdepodobnosti pri meraní hybnosti k, takže integrál $\int_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2\,dk$ je rovný 1. Naproti tomu $\Psi_k(x,\,t)$ nie je normovaná na 1, ale na delta funkciu: $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_k(x,\,t)|^2\,dx$ je rovný nekonečnu.
Ukážte, že balík $\Psi(x)$ je normovaný na 1.