Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. *časová Schrodingerova rovnica*
Napíšte spamäti časovú Schrodingerovu rovnicu v jednorozmernom priestore.
Čo táto rovnica hovorí?
Pre aké vlnové funkcie (a teda kvantové stavy) platí? Alebo inak: existujú kvantové stavy (ak áno, tak ktoré), pre ktoré neplatí?

2. *bezčasová Schrodingerova rovnica*
Napíšte spamäti bezčasovú Schrodingerovu rovnicu.
Čo táto rovnica hovorí?
Pre aké vlnové funkcie (a teda kvantové stavy) platí? Alebo inak: existujú kvantové stavy (ak áno, tak ktoré), pre ktoré neplatí?

3. *stacionárne stavy častice na úsečke a SchR*
(a) Kapitolu o vlastnostiach vlnovej funkcie sme začali tým, že sme bez odvodenia napísali vlnové funkcie $\Psi_n(x,\, t)$ popisujúce stacionárne stavy častice na úsečke. Napíšte ešte raz tieto vlnové funkcie aj so správnym normovaním a overte, že naozaj pre vybrané hodnoty E vyhovujú **bezčasovej** SchR, ktorú ste uviedli v odpovedi na predchádzajúcu otázku. Plus spĺňajú okrajové podmienky $\Psi_n(x = 0,\, t) = \Psi_n(x = L,\, t) = 0$ pre každé prirodzené číslo n a pre každý čas $t \geq 0$.
Čomu sa musí rovnať E (pri danom n, teda presnejšie E_n), aby bola splnená bezčasová SchR? Bude bezčasová SchR splnená pre ľubovolnú hodnotu E?

(b) Takisto overte, že $\Psi_n(x,\, t)$ vyhovujú časovej SchR.

4. *nestacionárne stavy častice na úsečke a SchR*
Teraz chceme uvažovať taký stav častice na úsečke, ktorý nie je stacionárnym. Napríklad stav popísaný vlnovou funkciou $\Psi(x,\, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi_1(x,\, t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Psi_2(x,\, t)$. Pripomeňme, že toto je nestacionárny stav preto, lebo hustota pravdepodobnosti výskytu častice na úsečke $|\Psi(x,\, t)|^2$ závisí na čase.

(a) Overte, že $\Psi(x,\, t)$ naozaj nevyhovuje bezčasovej SchR. (Nie je to žiadne prekvapenie, keďže bezčasová SchR má platiť iba pre stacionárne stavy.)

(b) Na druhej strane overte, že $\Psi(x,\, t)$ vyhovuje časovej SchR.

(c) Zamyslite sa a vysvetlite nasledovnú záhadu: z nadhľadu možno povedať, že obe Schr (viď príklady **1.** a **2.** vyššie) sú lineárne v Ψ. Je preto normálne, že lineárna kombinácia riešení časovej SchR je tiež riešením časovej SchR. Prečo to ale neplatí pre bezčasovú SchR?

5. *stacionárne stavy častice viazanej na štvorec a SchR*
Bez odvodenia sme v minulosti uviedli, že stacionárne stavy častice viazanej na štvorec popisuje vlnová funkcia $\Psi_{n_x,\, n_y}(x,\, y,\, t) = \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_x \pi x}{L}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_y \pi y}{L}\right) e^{-iE_{n_x,\, n_y} t/\hbar}$, kde n_x a n_y sú prirodzené čísla.

(a) Overte, že naozaj pre vybrané hodnoty E funkcie $\Psi_{n_x,\, n_y}(x,\, y,\, t)$ vyhovujú **bezčasovej** SchR, ktorú ste uviedli v odpovedi na otázku **2.** vyššie. Plus spĺňajú okrajové podmienky $\Psi_{n_x\, n_y}(x = 0,\, y,\, t) = \Psi_{n_x\, n_y}(x = L,\, y,\, t) = \Psi_{n_x\, n_y}(x,\, y = 0,\, t) = \Psi_{n_x\, n_y}(x,\, y = L,\, t) = 0$ pre každé prirodzené čísla n_x a n_y a pre každý čas $t \geq 0$.
Čomu sa musí rovnať E (pri danom n_x a n_y, teda presnejšie $E_{n_x,\, n_y}$), aby bola splnená bezčasová SchR? Bude splnená pre ľubovolnú hodnotu E?

(b) Takisto overte, že $\Psi_{n_x\, n_y}(x,\, y,\, t)$ vyhovujú časovej SchR.

6. *stacionárne stavy voľnej častice a SchR*
Podobne ako v predchádzajúcich príkladoch **3.** až **5.** ukážte, že vlnové funkcie stacionárnych stavov voľnej častice v jednom a dvoch rozmeroch naozaj vyhovujú časovej aj bezčasovej SchR, zatiaľ čo nejaká ich lineárna kombinácia (čiže superpozícia) spĺňa časovú SchR, ale nespĺňa bezčasovú SchR. Pre aké energie E vyhovujú $\Psi_p(x,\, t)$ a $\Psi_{p_x\, p_y}(x,\, y,\, t)$ bezčasovej SchR?

7. *základný stav elektrónu v atóme vodíka*
Vlnovú funkciu základného stavu elektrónu v atóme vodíka možno napísať v tvare $\Psi_{100}(r,\, t) = A\, e^{-r/a}\, e^{-iE_1 t/\hbar}$, kde A je normovacia konštanta a E_1 je tiež konštanta. V minulosti sme sa s ňou už zoznámili, ale bez odvodenia či aspoň zdôvodnenia. Preto teraz overte, že vlnová funkcia $\Psi_{100}(r)$ spĺňa bezčasovú SchR pre jednu konkrétnu hodnotu E_1. Čomu je rovné toto E_1? Malo by to byť $-13.6\,\mathrm{eV}$. Je to naozaj tak?
Pomôcka: ide o trojrozmerný prípad so sférickou symetriou, preto by bolo vhodné napísať laplasián vo sférických premenných a držať sa ich v matematických úpravách.