Príklady na cvičenie z kvantovej teórie 1

1. *hermitovský operátor*
Napíšte spamäti definíciu hermitovského operátora pôsobiaceho na vlnové funkcie v jednorozmernom priestore. *Uviedli ste aj podmienku, že takýto operátor musí byť lineárny?*
Zopakujte z prednášky, tentokrát samostatne, dôkaz hermitovosti operátora parity.

2. *vlastnosti hermitovských operátorov, opakovanie z prednášky*
Čo je pozoruhodné na stredných hodnotách hermitovských operátorov? (*Čomu je rovná ich imaginárna časť?*)
Čo je pozoruhodné na vlastných hodnotách hermitovských operátorov? (*Čomu je rovná ich imaginárna časť?*)
V akom kvantovom stave je systém, o ktorom vieme so 100-percentnou istotou povedať, že mu pri meraní veličiny A nameriame hodnotu a?
V akom vzťahu sú dve vlastné funkcie hermitovského operátora $\hat{A}$ prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám $\hat{A}$? Je v odpovedi dôležité, či sú tie vlastné hodnoty degenerované?
Čo je mimoriadne na súbore všetkých vlastných funkcií hermitovského operátora?

3. *operátor parity*
Na operátore parity demonštrujme vlastnosti, ktoré boli vo všeobecnosti zhrnuté v predchádzajúcej otázke. Z príkladu **1.** už vieme, že operátor parity $\hat{P}$ (v jednorozmernom prípade) je hermitovský.

(a) Určte jeho vlastné hodnoty. *Návod: nechajte ho pôsobiť dvakrát na vlastnú funkciu.*

(b) Aké vlastné funkcie prislúchajú vlastným hodnotám nájdeným v časti *(b)*?

(c) Koľkokrát sú degenerované vlastné hodnoty $\hat{P}$?

(d) Naozaj platí, že vlastné funkcie $\hat{P}$ prislúchajúce k rôznym vlastným hodnotám sú na seba ortogonálne?

(e) Naozaj platí, že každú funkciu (z L^2) možno vyskladať ako superpozíciu vlastných funkcií $\hat{P}$?

4. *komutujúce hermitovské operátory*
Komutujúce hermitovské operátory majú spoločné vlastné funkcie.
Pre *nedegenerované* vlastné hodnoty platí táto veta úplne presne.
Pre *degenerované* vlastné hodnoty platí pre správnu lineárnu kombináciu vlastných funkcií (odpovedajúcich degenerovanej vlastnej hodnote).

(a) Na prednáške sme vetu predviedli na príklade voľnej častice a operátorov hamiltoniánu (2x degenerované vlastné hodnoty) a parity (vlastné hodnoty s nekonečnou degeneráciou). Ukážte, že tieto dva operátory naozaj komutujú.
Ktoré sú ich spoločné vlastné funkcie?

(b) Pre voľnú časticu máme aj inú dvojicu komutujúcich operátorov: hamiltonián a hybnosť. Ktoré sú ich spoločné vlastné funkcie?

(c) Budú mať spoločné vlastné funkcie aj operátory hybnosti a parity? Ak áno, ktoré funkcie to sú? Ak nie, prečo nie?
Napíšte (vypočítajte), čomu je rovný komutátor $[\hat{p}, \hat{P}]$.

5. *komutujúce hermitovské operátory*
Hamiltonián jednoduchého harmonického operátora (JHO) je $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Nájdite komutátor $\hat{H}$ s paritou $\hat{P}$.

Čo znamená výsledok pre vlnové funkcie stacionárnych stavov JHO? Možno predpovedať, že budú iba párne alebo nepárne?

6. *$\hat{H}$ a $\hat{P}$ na úsečke*
Toto je podobná otázka ako v predchádzajúcom príklade, ale pre časticu na úsečke. Definujme tu operátor parity voči stredu úsečky: $\hat{P}\Psi(x) = \Psi(L - x)$, pre $x \in \langle 0,\, L\rangle$.

(a) Je to hermitovský operátor? Aké sú jeho vlastné hodnoty? A k nim vlastné funkcie?

(b) Komutujú $\hat{H}$ a $\hat{P}$?
Poznámka: potenciál je rovný nule na úsečke a nekonečnu mimo úsečky.

(c) Nakoľko $\hat{H}$ a $\hat{P}$ komutujú, aký dôsledok to má pre vlnové funkcie stacionárnych stavov?

7. *nekomutujúce operátory*
Uvažujme nekomutujúce operátory (t.j. také, že záleží na ich poradí) $\hat{x}$ a $\hat{p}$ v jednorozmernom svete. Položme si otázku: môže existovať kvantový systém popísaný vlnovou funkciou, ktorá je spoločnou vlastnou funkciou týmto dvom nekomutujúcim operátorom?

Keby boli $\hat{x}$ a $\hat{p}$ komutujúce, tak môže. Vtedy by mali spoločné vlastné funkcie, ako sme ilustrovali vyššie.

Ak ale nekomutujú, mohlo by to nastať v nejakom špeciálnom prípade?

Ák áno, systému so 100%-nou istotou odmeriame konkrétnu polohu, a jeho vlnovú funkciu meraním nezmeníme. Takisto potom so 100%-nou istotou tomuto systému odmeriame konkrétnu hybnosť, a jeho vlnovú funkciu meraním nezmeníme.

Tie 100%-né istoty však znamenajú existenciu stavu systému, pre ktorý $\Delta x = 0$ aj $\Delta p = 0$, čo je v zjavnom spore s princípom neurčitosti.

Vyslovte dôsledok, či môže existovať stav popísaný vlnovou funkciou, ktorá by bola spoločná vlastná funkcia $\hat{x}$ aj $\hat{p}$.

Vyslovte dôsledok, či môže existovať stav popísaný vlnovou funkciou, ktorá sa nebude meniť pri striedavo sa opakujúcich meraniach polohy a hybnosti.

8. *nekomutujúce operátory*
(a) Uvažujme nekomutujúce hermitovské operátory $\hat{A}$ a $\hat{B}$, pre ktoré $[\hat{A},\, \hat{B}] = i\hat{C}$. Aký vzťah neurčitosti spĺňa súčin $\Delta A\, \Delta B$?

(b) Je v princípe možné, aby pre rôzne stavy Ψ toho istého systému platili rôzne vzťahy neurčitosti? Odpoveď zdôvodnite.

(c) Aký vzťah neurčitosti bude platiť pre súčin Δp a ΔP v stave Ψ na základe Vášho výsledku v príklade **4.***(c)*?

(d) Uvažujme gaussovský vlnový balík popisujúci voľnú časticu. Na základe časti *(c)* aký vzťah neurčitosti bude platiť pre súčin Δp a ΔP v tomto stave?